Technische Universität München

Institute of Flight System Dynamics

Aptitude Test Automatic Control (SAMPLE) – SOLUTION

Prüfer/Examiner: Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

2022-12-24

Name/Name	
Bewerbungsnr./Application nr.	
Raum/Room	ONLINE INFORMATION MATERIAL
Platz/Seat	
Ausweiskontrolle *(von Aufsicht auszufüllen)* ID Check *(to be filled by staff)*	

Aufgabe/Task	max. Punkte/ max. Points	Punkte/ Points
1	8	
2	11	
3	10	
4	3	
5	10	
6	3	
7	5	
8	3	
9	7	
10	5	
11	3	
12	3	
Σ	71	

(von Aufsicht auszufüllen / to be filled by staff)

Prüfung/Exam

Bearbeitungszeit/Editing Time: 1h

Version: 730d17af

Hinweise zur Prüfung:

Die *Operatoren*, die in den Prüfungsaufgaben vorkommen, finden Sie in der folgenden Tabelle. Bitte beachten Sie diese bei der Bearbeitung der Aufgaben.

nennen	ohne nähere Erläuterungen aufzählen; zielgerichtet Informationen zusammentragen, ohne diese zu bewerten
darstellen, wiedergeben	Zusammenhänge, Probleme, Inhalte unter einer bestimmten Fragestellung sachbezogen ausführen; Strukturen, Situationen objektiv abbilden
beschreiben	genaue, eingehende, sachliche, auf Erklärung und Wertung verzichtende Darstellung von Personen, Situationen, Vorgängen (evtl. mit Materialbezug)
begründen	einen Sachverhalt bzw. eine Aussage durch nachvollziehbare Argumente stützen
erläutern, erklären	Materialien, Sachverhalte oder Thesen ggf. mit zusätzlichen Informationen und Beispielen verdeutlichen, in einen Zusammenhang einordnen und begründen
überprüfen	eine Textaussage, These, Argumentation, ein Analyseergebnis, einen Sachverhalt auf der Grundlage eigener Kenntnisse, Einsichten und Textkenntnis auf ihre/seine Angemessenheit hin untersuchen und zu Ergebnissen kommen
interpretieren	auf der Grundlage einer Analyse Sinnzusammenhänge aus Materialien methodisch reflektiert erschließen, um zu einer schlüssigen Gesamtauslegung zu gelangen
diskutieren	zu einer Problemstellung oder These eine Argumentation entwickeln, die zu einer begründeten Bewertung führt
erschließen, herausarbeiten	aus Materialien bestimmte Sachverhalte herleiten, die nicht explizit genannt werden

Quelle: Kultusministerkonferenz

Notes for the Exam:

The *operators* used in the exam can be found in the following table. Please consider them when editing the tasks.

name	to mention or identify by name
present	(re-)structure and write down
justify	support a fact or a statement with reasonable arguments
describe	give an accurate account of sth.
show, illustrate	use examples to explain or make clear
explain	describe and define the causes
assess, evaluate	consider in a balanced way the points for and against sth.
interpret	make clear the meaning of sth. and give your own views on it
discuss	investigate or examine by argument; give reasons for and against

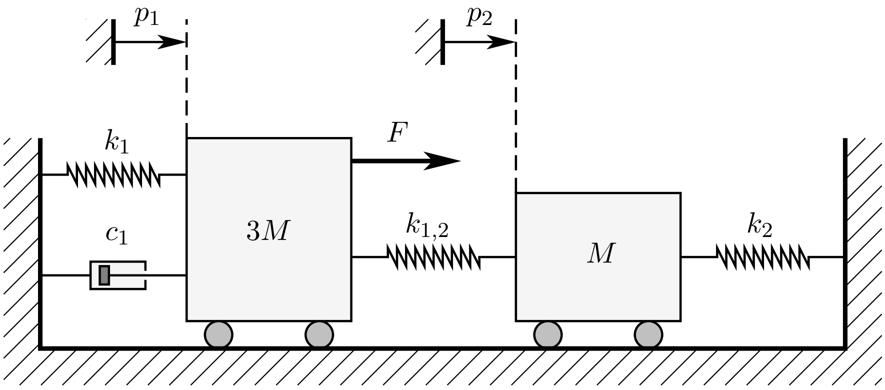
Source: Kultusministerkonferenz

Viel Erfolg! / Good luck!

Aufgabe/ Task 1: **Modellbildung**

Modeling *(ca. 8 Punkte/Points)*

Betrachtet werden zwei reibungslos gelagerte Wagen mit den Massen $3M$ und M. Der linke Wagen ist mit einer Feder der Steifigkeit k_1 und einem Dämpfer mit dem Dämpfungskoeffizienten c_1 mit der linken Wand verbunden, der rechte Wagen ist durch eine Feder mit der Steifigkeit k_2 mit der rechten Wand verbunden. Der linke Wagen wird durch eine externe Kraft F angeregt. Zusätzlich sind beide Wagen durch eine Feder mit der Steifigkeit $k_{1,2}$ miteinander verbunden. In der Ruhelage $p_1 = p_2 = 0$ sind alle Federn entspannt. Zudem werden alle Federn und Dämpfer als masselos angenommen.



Consider two frictionless carts with the masses $3M$ and M. The left cart is connected to the left wall by a spring with the stiffness k_1 and a damper with the damping coefficient c_1, the right cart is connected to the right wall by a spring with the stiffness k_2. The left cart is excited by an external force F. Additionally, both carts are coupled with a spring with a stiffness of $k_{1,2}$. In the equilibrium position $p_1 = p_2 = 0$ all springs are tension-free. All springs and dampers are considered massless.

a) Stellen Sie mithilfe des Impulssatzes die Bewegungsdifferentialgleichung des linken Wagens in der Form $\ddot{p}_1 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$ auf.

Use Newton's second law to derive the equation of motion of the left cart in the form $\ddot{p}_1 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$. *(ca. 2 Punkte/Points)*

$$3M\,\ddot{p}_1 = F - k_1\,p_1 - c_1\,\dot{p}_1 + k_{1,2}\,(p_2 - p_1)$$

$$\ddot{p}_1 = \frac{1}{3M}\left(-(k_1 + k_{1,2})\,p_1 - c_1\,\dot{p}_1 + k_{1,2}\,p_2 + F\right)$$

b) Stellen Sie mithilfe des Impulssatzes die Bewegungsdifferentialgleichung des rechten Wagens in der Form $\ddot{p}_2 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$ auf.

Use Newton's second law to derive the equation of motion of the right cart in the form $\ddot{p}_2 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$. *(ca. 2 Punkte/Points)*

$$M\,\ddot{p}_2 = k_{1,2}\,(p_1 - p_2) - k_2\,p_2$$

$$\ddot{p}_2 = \frac{1}{M}\,(k_{1,2}\,p_1 - (k_2 + k_{1,2})\,p_2)$$

c) Stellen Sie ein Zustandsraummodell in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \quad y = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ auf. Der Eingang u ist die externe Kraft F und als Ausgang y soll der Abstand $p_2 - p_1$ betrachtet werden. Verwenden Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \left[p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2\right]^\mathsf{T}$.

Derive a state space model of the form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \quad y = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. The input u is the external force F and the distance $p_2 - p_1$ shall be considered as output signal y. Use the state vector $\mathbf{x} = \left[p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2\right]^\mathsf{T}$. *(ca. 4 Punkte/Points)*

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \ddot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_{1,2}}{3M} & -\frac{c_1}{3M} & \frac{k_{1,2}}{3M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{1,2}}{M} & 0 & -\frac{k_2+k_{1,2}}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \dot{p}_1 \\ p_2 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = p_2 - p_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \dot{p}_1 & p_2 & \dot{p}_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$$

Aufgabe/ Task 2: **Laplace-Transformation**

Laplace Transform *(ca. 11 Punkte/Points)*

Ein System sei durch die Differentialgleichung

$$3\ddot{y}(t) + 9\dot{y} = 4\dot{u}(t) + 3u(t)$$

gegeben. Das System wird aus dem Anfangszustand $y(-0) = 0,\ \dot{y}(-0) = 7$ mit einem Dirac-Impuls $u(t) = \delta(t),\ u(-0) = 0$ angeregt.
Beachten Sie die folgenden Notationshinweise und die gegebenen Laplace-Korrespondenzen.

A dynamic system is defined by the following differential equation:

$$3\ddot{y}(t) + 9\dot{y} = 4\dot{u}(t) + 3u(t)$$

The system is excited by a dirac-impulse $u(t) = \delta(t),\ u(-0) = 0$ starting from its initial state $y(-0) = 0,\ \dot{y}(-0) = 7$.
Consider the following hints regarding notation and the given Laplace correspondences.

Hinweise / Hints:

$$x(-0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} x(t), \qquad x(+0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x(t),$$

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1, \qquad \mathscr{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}, \qquad \mathscr{L}\{1 - e^{-at}\} = \frac{a}{s\,(s+a)}$$

---

a) Bestimmen Sie den Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$ für $t > 0$.
Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist nicht notwendig.

Determine the output response $y(t)$ for $t > 0$.
Hint: Partial fraction decomposition is not necessary.

(ca. 10 Punkte/Points)

(siehe nächste Seite / see next page)

$$3\left(s^2\,Y(s) - s\,y(-0) - \dot{y}(-0)\right) + 9\left(s\,Y(s) - y(-0)\right) = 4\left(s\,U(s) - u(-0)\right) + 3\,U(s) \quad \text{(2P)}$$
$$Y(s)\,(3s^2) - 21 + Y(s)\,9s = (4s+3)\,U(s)$$
$$Y(s)\,(3s^2 + 9s) = (4s+3)\,U(s) + 21 \quad \text{(1P)}$$

$$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \text{(1P)}$$
$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{4s+3}{3s^2+9s} + \frac{21}{3s^2+9s} \quad \text{(1P)}$$
$$Y(s) = \frac{4s}{3s^2+9s} + \frac{3}{3s^2+9s} + \frac{21}{3s^2+9s}$$
$$Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} + \frac{1}{s(s+3)} + \frac{7}{s(s+3)}$$
$$Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} + \frac{8}{s(s+3)}$$
$$Y(s) = \frac{4}{3}\frac{1}{s+3} + \frac{8}{3}\frac{3}{s(s+3)} \quad \text{(3P)}$$
$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{4}{3}\,e^{-3t} + \frac{8}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}e^{-3t} \quad \text{(2P)}$$

b) Geben Sie an, ob das System Ein-/Ausgangsstabilität (E/A-Stabilität) aufweist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Evaluate if the system is bounded-input-bounded-output (BIBO) stable. Justify your answer.

(ca. 1 Punkt/point)

Das System ist nicht E/A-stabil, da es einen Pol in null aufweist (Integratorverhalten).

The system is not BIBO stable, since it exhibits a pole at zero (integrator pole).

Aufgabe/ Task 3: **Bode-Diagramm**

Bode Diagram *(ca. 10 Punkte/Points)*

Die Übertragungsfunktion eines Systems kann durch die Reihenschaltung der beiden Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ dargestellt werden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)\,G_2(s)$$

Im nachfolgenden Diagramm sind bereits Approximationen des Amplituden- und Phasengangs des Elements $G_1(s)$ eingezeichnet. Die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ lautet:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s+20)^2}$$

Aufgaben: siehe nächste Seiten.

The transfer function of a dynamic system can be represented by the series connection of the two transfer functions $G_1(s)$ and $G_2(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)\,G_2(s)$$

The following diagram contains approximations of the magnitude and phase response curves for the element $G_1(s)$. The transfer function $G_2(s)$ is:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s+20)^2}$$

Tasks: see next pages.

a) Bestimmen Sie die Eckfrequenzen von $G_2(s)$, sowie Näherungswerte für den Startwert $|G_2(\omega_{min})|$ und die Anfangssteigung $|G_2(\omega_{min})|'$ des Amplitudengangs in dB bzw. dB/Dekade und den Startwert des Phasengangs $\angle G_2(\omega_{min})$.

Determine the corner frequencies of $G_2(s)$ as well as approximations of the initial value $|G_2(\omega_{min})|$ and gradient $|G_2(\omega_{min})|'$ of the magnitude response in dB and dB/decade and the initial value of the phase response $\angle G_2(\omega_{min})$. *(ca. 4 Punkte/Points)*

Hinweis / Hint: $\omega_{min} = 10^{-1}$

Eckfrequenzen:
Corner frequencies:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s+20)^2} = 10\frac{s/200 + 1}{(s/20+1)^2}$$
$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{200} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{1}{|\tilde{T}_1|} = 200$$
$$T_{1,2} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{|T_{1,2}|} = 20$$

Verstärkung $K = 10$, keine Pole oder Nullstellen in 0:
Gain $K = 10$, no poles or zeros at 0:

$$\Rightarrow \quad |G_2(\omega_{min})| \approx 20\,\log_{10}(10) = 20\text{ dB}$$
$$\Rightarrow \quad |G_2(\omega_{min})|' \approx 0\text{ dB/decade}$$
$$\Rightarrow \quad \angle G_2(\omega_{min}) \approx 0^\circ$$

b) Zeichnen Sie den angenäherten Verlauf des Amplituden- und Phasengangs von $G_2(s)$ in das Diagramm auf der nächsten Seite.

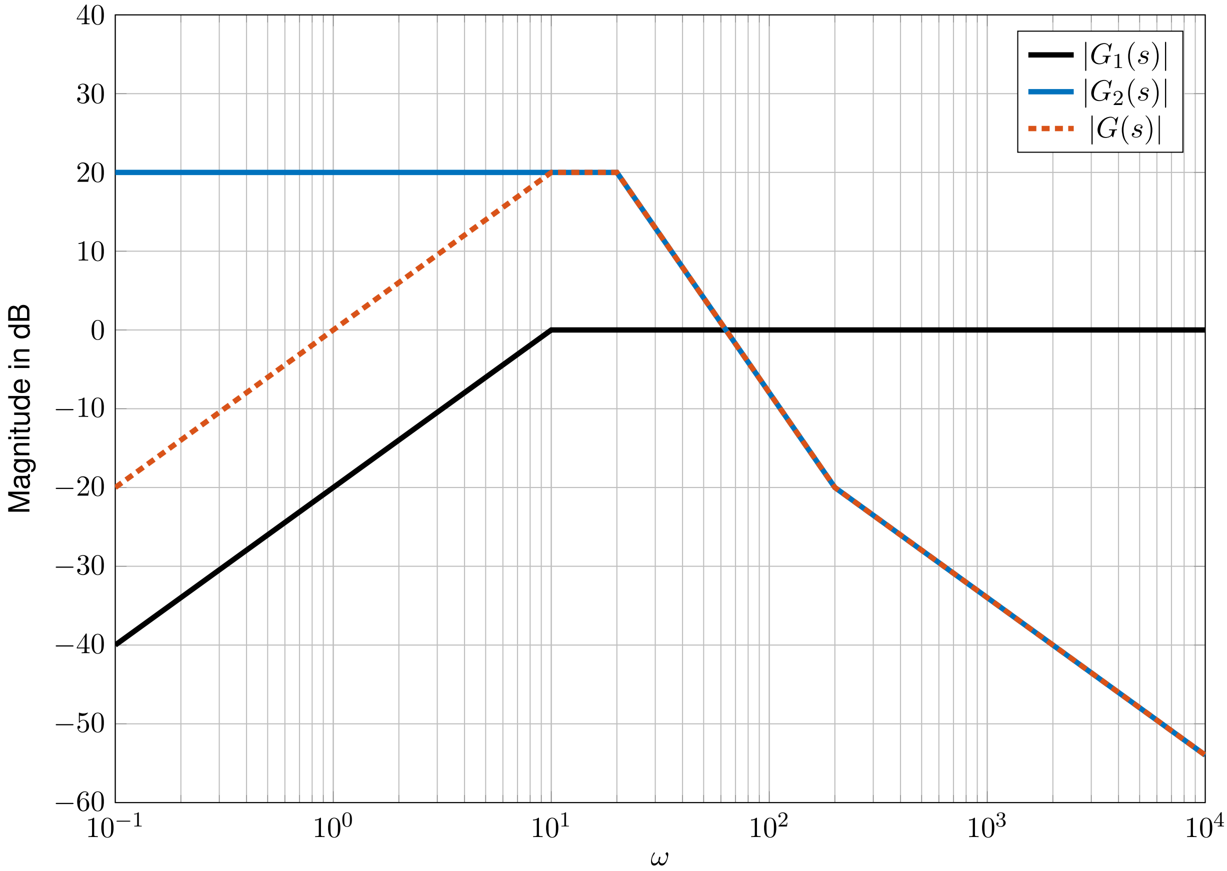
Draw the approximation of the magnitude and phase response curves of $G_2(s)$ in the diagram on the next page.

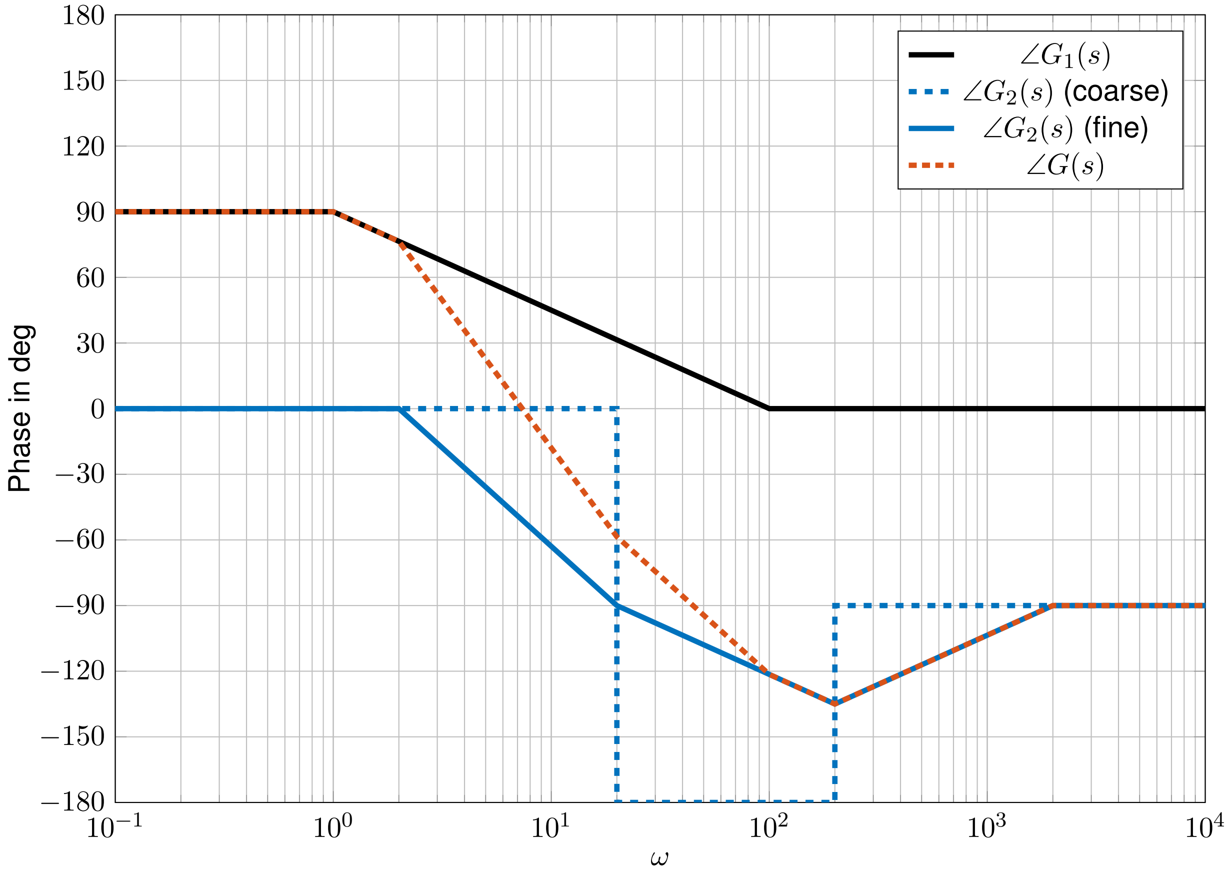
(ca. 4 Punkte/Points)

c) Zeichnen Sie anschließend den angenäherten Verlauf des Amplituden- und Phasengangs des Gesamtsystems $G(s)$ in das Diagramm auf der nächsten Seite.

Finally, draw the approximation of the magnitude and phase response curves of the entire system $G(s)$ in the diagram on the next page.

(ca. 2 Punkte/Points)


40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
Magnitude in dB
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
ω
$|G_1(s)|$
$|G_2(s)|$
$|G(s)|$

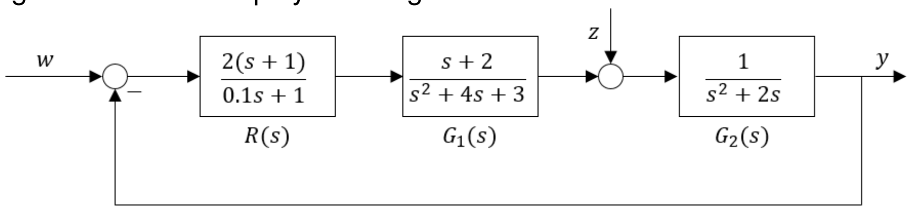

180
150
120
90
60
30
0
−30
−60
−90
−120
−150
−180
Phase in deg
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
ω
$\angle G_1(s)$
$\angle G_2(s)$ (coarse)
$\angle G_2(s)$ (fine)
$\angle G(s)$

Aufgabe/ Task 4: **Systemanalyse / Stationäre Genauigkeit**

System Analysis / Steady-State Accuracy *(ca. 3 Punkte/Points)*

Gegeben ist der folgende stabile, geschlossene Regelkreis:

The following stable closed-loop system is given:



a) Beurteilen Sie die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises bezüglich des Führungsverhaltens (Führungsgröße: w) für eine Sprungeingabe in w und begründen Sie Ihre Aussage.

Evaluate the steady-state accuracy of the closed-loop system with regard to the reference tracking behavior of the control loop (reference variable: w) assuming a step input in w and justify your statement.

(ca. 1 Punkt/point)

Integration in $R\,G_1\,G_2$, geschlossener Kreis stabil $\Rightarrow$ stationär genaues Führungsverhalten.

Integration in $R\,G_1\,G_2$, closed-loop stable $\Rightarrow$ steady-state accurate reference tracking.

b) Beurteilen Sie die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises bezüglich des Störverhaltens (Störgröße: z) für eine Sprungeingabe in z und begründen Sie Ihre Aussage.

Evaluate the steady-state accuracy of the closed-loop system with regard to the disturbance behavior of the control loop (disturbance variable: z) assuming a step input in z and justify your statement.

(ca. 1 Punkt/point)

Keine Integration in $R\,G_1$ $\Rightarrow$ Störverhalten nicht stationär genau.

No integration in $R\,G_1$ $\Rightarrow$ disturbance behavior not steady-state accurate.

c) Um welchen Typ von Regler $R(s)$ handelt es sich? Unterscheiden Sie gegebenenfalls zwischen idealer und realer Ausführung.

What type of the controller $R(s)$ is used? If necessary, distinguish between ideal and real implementation.

(ca. 1 Punkt/point)

Realer PD-Regler.

Real PD controller.

Aufgabe/ Task 5: **Ein-Ausgangslinearisierung**

Input/Output Linearization *(ca. 10 Punkte/Points)*

Betrachtet wird ein dynamisches System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u),\ y = h(\mathbf{x})$ mit den Zuständen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$, dem Eingangssignal u und Ausgangssignal y:

Consider a dynamic system of the form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u),\ y = h(\mathbf{x})$ with the states $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$, input signal u and output signal y:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n && \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ (\mathbf{x}, u) \mapsto \dot{\mathbf{x}} \\ &u \in \mathbb{R} && h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto y \end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie *allgemein* das Prinzip der Ein-/ Ausgangslinearisierung für Eingrößensysteme („single input single output“, SISO) dieser Form.

Describe *in general terms* the principle of input-output linearization for single input single output (SISO) systems of this form.

(ca. 2 Punkte/Points)

Der Systemausgang y wird abgeleitet, bis in der Ableitung der Ordnung r (Differenzordnung) der Systemeingang u explizit erscheint. Der Zusammenhang zwischen $\overset{(r)}{y}$ und u wird nach dem Eingang u aufgelöst; hieraus resultiert ein Regelgesetz, das durch Inversion die Nichtlinearität der Dynamik kompensiert, sodass ein lineares Ein-Ausgangsverhalten entsteht. Der neue Eingang $\overset{(r)}{y}$ fungiert als Pseudosteuergröße.

The system output y is differentiated until an explicit influence by the input u appears at derivative order r (the relative degree). Solving the relation between $\overset{(r)}{y}$ and u for the input signal u yields a control law that compensates the nonlinearity of the system by inversion such that linear input-output dynamics result, with the new input $\overset{(r)}{y}$ acting as pseudo-control.

Im Folgenden wird das System S betrachtet:

In the following the system S is considered:

$$S: \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \sin(x_2) + (x_2 + 1)\, x_3 \\ x_1^5 + x_3 \\ x_1^2 + u \end{bmatrix}, \quad h(\mathbf{x}) = x_1$$

b) Leiten Sie die Ausgangsgröße des Systems S bis zur Differenzordnung ab und geben Sie den Zusammenhang zur Eingangsgröße explizit an.

Differentiate the output of the system S up to the relative degree and explicitly state the relation to the input signal.

(ca. 2 Punkte/Points)

$$y = x_1$$
$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin(x_2) + (x_2 + 1)\, x_3$$
$$\ddot{y} = \big(\cos(x_2) + x_3\big)\, \dot{x}_2 + (x_2 + 1)\, \dot{x}_3$$
$$\ddot{y} = \big(\cos(x_2) + x_3\big)\, (x_1^5 + x_3) + (x_2 + 1)\, (x_1^2 + u)$$

c) Geben Sie eine Pseudosteuergröße ν für das System S an.

State a pseudo-control variable ν for the system S.

(ca. 1 Punkt/point)

$$\nu = \ddot{y}$$

d) Berechnen Sie ein Regelgesetz $u = g(\mathbf{x}, \nu)$ für das System S, das ein lineares Übertragungsverhalten zwischen ν und y erzeugt.

Calculate a control law $u = g(\mathbf{x}, \nu)$ for the system S that linearizes the dynamics between ν and y.

(ca. 2 Punkte/Points)

$$u = \frac{\nu - \big(\cos(x_2) + x_3\big)\, (x_1^5 + x_3) - (x_2 + 1)\, x_1^2}{(x_2 + 1)}$$

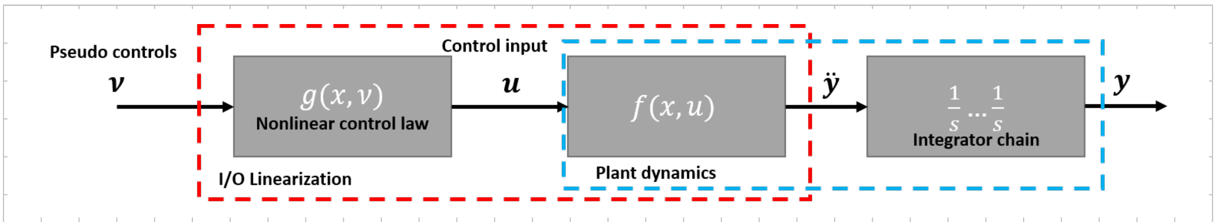
e) Zeichnen Sie die Struktur des Gesamtsystems mit den folgenden Komponenten und heben Sie die Ein-/ Ausgangslinearisierug hervor.

1. Pseudosteuergröße ν
2. Nichtlineares Regelgesetz $u = g(x, \nu)$
3. Eingangsgröße u
4. Regelstrecke
5. Integratorkette

Draw the block structure of the complete system with the following components in a diagram and highlight the I/O linearization.

1. pseudo-control ν
2. nonlinear control law $u = g(x, \nu)$
3. control input u
4. plant dynamics
5. integrator chain

(ca. 3 Punkte/Points)



Aufgabe/ Task 6: **Nyquist-Kriterium**

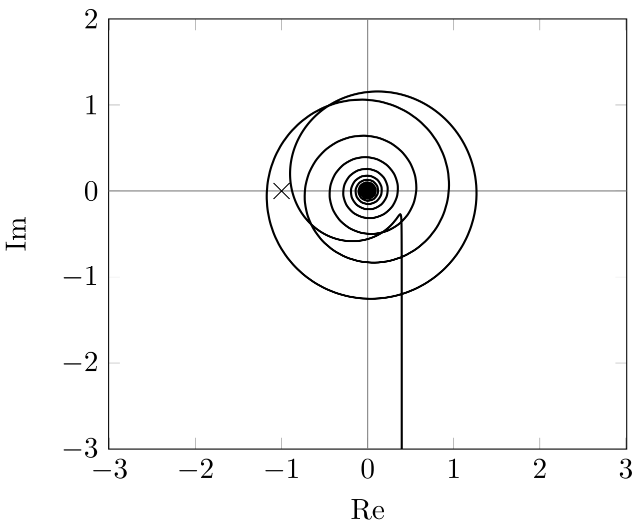
Nyquist Criterion *(ca. 3 Punkte/Points)*

Die folgende Abbildung zeigt die Ortskurve $G(j\omega)$ des offenen Kreises $G(s)$ für alle relevanten Frequenzen $\omega > 0$. Die Stabilität des geschlossenen Kreises soll mit dem allgemeinen Nyquist-Kriterium untersucht werden.

- Berechnen Sie die Winkeländerung W_+^* von $G(jw)+1$, die für die Stabilität des geschlossenen Kreises erforderlich ist.
- Ermitteln Sie die tatsächliche Winkeländerung W_+.
- Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises.

The following plot shows the open-loop frequency response $G(j\omega)$ of the open-loop system $G(s)$ for all relevant frequencies $\omega > 0$. The closed-loop stability shall be assessed using the general Nyquist criterion.

- Calculate the argument change W_+^* of $G(jw)+1$ required for closed-loop stability.
- Determine the actual argument change W_+.
- Determine the stability of the closed-loop system.



$$G(s) = 220\,\exp(-s)\frac{(s+0.05)\,(s-1)}{s\,(s+10)^2\,(s-5)}$$

- ein neutraler und ein instabiler Pol / one neutral and one unstable pole
  $\Rightarrow \quad W_+^* = 1\frac{\pi}{2} + 1\pi = \frac{3\pi}{2}$ (1P)
- aus Ortskurve / from locus: $W_+ = -\frac{3\pi}{2}$ (1P)
- $W_+ \neq W_+^* \quad \Rightarrow$ geschlossener Kreis instabil / closed-loop system unstable (1P)
- *Alternativlösung / alternative solution:*
  $\omega \in [-\infty, \infty] \quad \Rightarrow \quad W_+^* = 3\pi \neq -3\pi = W_+$

Aufgabe/ Task 7: **Zustandsbeobachter**

State Observer *(ca. 5 Punkte/Points)*

Gegeben sei das System Σ. Um seinen Zustand $\mathbf{x}$ zu schätzen, wird ein Beobachter L eingesetzt. Der Schätzfehler $\tilde{\mathbf{x}}$ ist definiert als $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$.

The system Σ is given. To estimate its state $\mathbf{x}$, a state observer L is used. The estimation error $\tilde{\mathbf{x}}$ is defined as $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$.

$$\begin{array}{lll} \Sigma: & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} & y = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{x} \\ L: & \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{k}\,(y - \hat{y}) & \hat{y} = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{x} \end{array}$$

a) Leiten Sie die Differentialgleichung $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{x}}$ für die Schätzfehlerdynamik her.

Derive the differential equation $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{x}}$ for the estimation error dynamics.

(ca. 2 Punkte/Points)

$$\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\,(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{k}\,\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\,(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \underbrace{\left(\mathbf{A} + \mathbf{k}\,\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\right)}_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{\mathbf{x}}$$

Nun sind die folgenden Werte gegeben:

Now the following values are given:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und deren Eigenwerte.

Calculate the matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ and its eigenvalues.

(ca. 2 Punkte/Points)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{k}\,\mathbf{c}^\mathsf{T}) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -2$$

c) Verschwindet der Schätzfehler für $t \to \infty$? Begründen Sie Ihre Aussage.

Does the estimation error vanish for $t \to \infty$? Justify your answer.

(ca. 1 Punkt/point)

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

Aufgabe/ Task 8: **Übertragungsfunktion**

Transfer Function *(ca. 3 Punkte/Points)*

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$ für das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}\,f$$

mit der Ausgangsgleichung $x = \mathbf{a}^\mathsf{T}\,\mathbf{q}$.
Hinweis: $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \mathbf{a}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1\times n},\ f(t) \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}$

Calculate the transfer function $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$ for the system of second order differential equations

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{e}\,f$$

with the output equation $x = \mathbf{a}^\mathsf{T}\,\mathbf{q}$.
Hint: $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \mathbf{a}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1\times n},\ f(t) \in \mathbb{R},\ x(t) \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{M}\,s^2\,\mathbf{Q}(s) + \mathbf{R}\,s\,\mathbf{Q}(s) = e\,F(s) \qquad \text{(1P)}$$

$$(\mathbf{M}\,s^2 + \mathbf{R}\,s)\,\mathbf{Q}(s) = e\,F(s)$$

$$\mathbf{Q}(s) = (\mathbf{M}\,s^2 + \mathbf{R}\,s)^{-1}\,e\,F(s) \qquad \text{(1P)}$$

$$X(s) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\,\mathbf{Q}(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\mathbf{a}^\mathsf{T}\,(\mathbf{M}\,s^2 + \mathbf{R}\,s)^{-1}\,e}_{G(s)}\,F(s) \qquad \text{(1P)}$$

Aufgabe/ Task 9: **Reglerentwurf / Zustandsrückführung**

Control Design / State Feedback *(ca. 7 Punkte/Points)*

Betrachtet wird das folgende System mit Zustandsvektor $\mathbf{x}$, Stellgröße u und Ausgangssignal y:

Consider the following system with state vector $\mathbf{x}$, control input u and output signal y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^\mathsf{T}} \mathbf{x}$$

a) Berechnen Sie die Rückführverstärkung $\mathbf{r}$ des folgenden Regelgesetzes, sodass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in $\lambda_{R,1}, \lambda_{R,2}$ liegen.

Calculate the feedback gain $\mathbf{r}$ of the following control law such that the closed-loop eigenvalues become $\lambda_{R,1}, \lambda_{R,2}$.

$$u = -\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_{R,1} = -2, \quad \lambda_{R,2} = -3$$

(ca. 3 Punkte/Points)

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2]^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^\mathsf{T} \qquad \text{(0.5P)}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1-r_1 & s-r_2+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = s^2 + (2-r_2)s + (2-r_2-r_1) \qquad \text{(1P)}$$

$$\stackrel{!}{=} \prod_k (s - \lambda_{R,k}) = s^2 + 5s + 6 \qquad \text{(0.5P)}$$

$$(2-r_2) = 5 \quad \Rightarrow \quad r_2 = -3$$

$$(2-r_2-r_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = [-1, -3]^\mathsf{T} \qquad \text{(1P)}$$

b) Das Ausgangssignal y soll stationär genau der Führungsgröße w folgen. Berechnen Sie dazu den Parameter m_u des folgenden Regelgesetzes.

The output signal y shall track the reference signal w with steady-state accuracy. Calculate the corresponding parameter m_u of the following control law.

$$u = -\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x} + m_u\, w, \qquad m_u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{r} = [-4, -2]^\mathsf{T}$$

(ca. 4 Punkte/Points)

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{b}_w = \mathbf{b}\, m_u$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 5 & s+3 \end{bmatrix} \qquad \text{(1P)}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1} = \frac{1}{s^2+4s+8}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -5 & s+1 \end{bmatrix} \qquad \text{(1P)}$$

$$G_{yw}(s) = \mathbf{c}^\mathsf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1}\mathbf{b}_w = \frac{-5\, m_u}{s^2+4s+8} \qquad \text{(1P)}$$

$$1 \overset{!}{=} \lim_{s\to 0} G_{yw}(s) = -\frac{5}{8} m_u \qquad \text{(0.5P)}$$

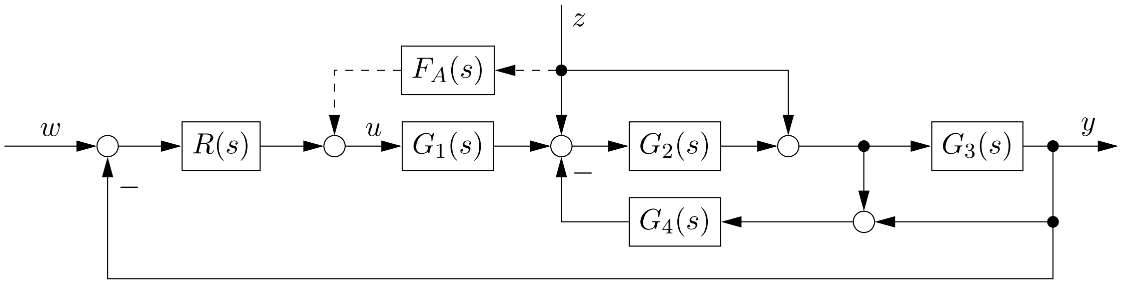
$$\Rightarrow m_u = -\frac{8}{5} \qquad \text{(0.5P)}$$

Aufgabe/ Task 10: **Regelungsstrukturen / Störgrößenaufschaltung**

Control Structures / Disturbance Rejection *(ca. 5 Punkte/Points)*

Betrachtet wird das folgende System mit Führungsgröße w, Stellgröße u, Regelgröße y, Regelstrecke $G_1(s)\dots G_4(s)$ und Regler $R(s)$. Auf das System wirkt die Störgröße z, die gemessen wird. Es soll eine Störgrößenaufschaltung $F_A(s)$ entworfen werden.

Consider the following system with reference signal w, control input u, output signal y, plant $G_1(s)\dots G_4(s)$ and controller $R(s)$. The system is affected by the disturbance z, which is measured. A disturbance rejection filter $F_A(s)$ shall be designed.



a) Berechnen Sie für den *offenen* Regelkreis die Übertragungsfunktionen $G_{yu}(s)$ und $G_{yz}(s)$ von der Stell- bzw. Störgröße zur Regelgröße. Hier gilt $F_A(s) = 0$.

Calculate the *open-loop* transfer functions $G_{yu}(s)$ and $G_{yz}(s)$ from the control input and disturbance to the output. Here, $F_A(s) = 0$.

(ca. 2 Punkte/Points)

Schnitt v am Eingang von G_3:
Auxiliary cut v at the input to G_3:

$$v = (1 + G_2)z + G_1G_2u - G_2G_4(1 + G_3)v$$

$$\Rightarrow \quad G_{vu}(s)|_{z=0} = \frac{G_1G_2}{1 + G_2G_4(1 + G_3)}$$

$$\Rightarrow \quad G_{vz}(s)|_{u=0} = \frac{1 + G_2}{1 + G_2G_4(1 + G_3)}$$

$$G_{yv} = G_3$$

$$\Rightarrow \quad G_{yu}(s) = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_4(1 + G_3)} \qquad \text{(1P)}$$

$$\Rightarrow \quad G_{yz}(s) = \frac{(1 + G_2)G_3}{1 + G_2G_4(1 + G_3)} \qquad \text{(1P)}$$

b) Berechnen Sie eine realisierbare Störgrößenaufschaltung $F_A(s)$ unter Verwendung der folgenden Übertragungsfunktionen. Ergänzen Sie, falls nötig, ein Filter der Form $V(s)$ (mit Begründung!).
Hinweis: Diese Aufgabe kann unabhängig gelöst werden.

Using the following transfer functions, calculate an appropriate disturbance rejection filter $F_A(s)$ that can be implemented in practice. If necessary, apply a filter of the form $V(s)$ (give reasons for this!).
Note: This task can be solved independently.

$$G_{yu} = \frac{s-2}{(s+2)(3s^2+13s-8)} \qquad G_{yz} = \frac{2s+1}{3s^2+13s-8}$$

$$V(s) = \frac{(s-a)^m}{(Ts+1)^n} \qquad T = 0.01,\ a \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

(ca. 3 Punkte/Points)

$$u = F_A z$$

$$y = G_{yu}u + G_{yz}z = (G_{yu}F_A + G_{yz})z \stackrel{!}{=} 0\ \forall z$$

$$\Rightarrow \quad F_{A,ideal} = -G_{yu}^{-1}G_{yz} = \frac{(s+2)(2s+1)}{s-2} \qquad \text{(1P)}$$

$F_{A,ideal}$ ist *instabil* und *nicht kausal*. Der instabile Pol $s_1 = 2$ muss durch eine Nullstelle in der rechten Halbebene kompensiert werden; ein Tiefpassfilter zweiter Ordnung stellt die Kausalität wieder her.

$F_{A,ideal}$ is *unstable* and *violates causality*. We need to cancel the unstable pole $s_1 = 2$ with a right half-plane zero and use a second-order low-pass filter to restore causality. (1P)

$$F_A = \frac{s-2}{(s+1)^2}F_{A,ideal} = \frac{(s+2)(2s+1)}{(Ts+1)^2} = 2\frac{(s+2)(s+0.5)}{(0.01s+1)^2} \qquad \text{(1P)}$$

Aufgabe/ Task 11: Zeitdiskrete Regelung

Discrete-Time Control *(ca. 3 Punkte/Points)*

Zur Implementierung eines zeitdiskreten Filters auf einem digitalen Mikrocontroller soll die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ diskretisiert und die Differenzengleichung des zeitdiskreten Filters hergeleitet werden.

For the implementation of a discrete time filter on a digital micro controller the continuous time transfer function $G(s)$ shall be discretized and the difference equation of the discrete time filter shall be derived.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{(s+10)}$$

a) Berechnen sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$. Die Abtastfrequenz des zeitdiskreten Filters beträgt $f_T = 5$. Verwenden Sie folgende Transformationsvorschrift:

$$s = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$$

Derive the discrete time transfer function $R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$. The sampling frequency of the discrete time filter is $f_T = 5$ Hz. Use the following transformation:

$$s = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$$

(ca. 1 Punkt/point)

$$R(z) = \frac{20}{\frac{1}{T}(1-z^{-1}) + 10} = \frac{20T}{(1-z^{-1}) + 10T}$$

$$R(z) = \frac{4}{3 - z^{-1}} = \frac{4\,z}{3\,z - 1}$$

b) Leiten Sie die Differenzengleichung zur Berechnung des Filterausgangssignals in der folgenden Form her:

Derive the difference equation for the computation of the filter output signal in the following form:

$$y[k] = f(u[k], u[k-1], \ldots, y[k-1], \ldots) \; .$$

(ca. 1 Punkt/point)

$$R(z) = \frac{4}{3 - z^{-1}}$$
$$3\,y[k] - z^{-1}\,y[k] = 4\,u[k]$$
$$y[k] = \frac{1}{3}(y[k-1] + 4\,u[k])$$

c) Auf den zeitdiskreten Filter wird zum Zeitpunkt $k = 1$ ein Einheitssprungsignal aufgeschaltet: $u[k > 0] = 1$. Der Anfangswert des Ausgangssignals y berträgt $y[k = 0] = 4$. Welchen Wert hat das Ausgangssignal $y[k]$ im Abtastschritt $k = 2$?

At the time step $k = 1$, a unit step signal is applied at the filter input: $u[k > 0] = 1$. The initial output value of the filter is $y[k = 0] = 4$. What is the value of the filter output signal $y[k]$ at the time step $k = 2$?

(ca. 1 Punkt/point)

$$y[0] = 4$$
$$y[1] = \frac{1}{3}(4 + 4 \cdot 1) = \frac{8}{3}$$
$$y[2] = \frac{1}{3}(\frac{8}{3} + 4 \cdot 1) = \frac{20}{9}$$

Aufgabe/ Task 12: **Kurzfragen**

Short Questions *(ca. 3 Punkte/Points)*

Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Tick the correct answer.

a) Welches der folgenden Elemente sorgt für stationäre Genauigkeit?

Which of the following elements leads to steady-state accuracy?

Optionen / Options	Antwort / Answer
Integrator / Integrator	✓
Differentiator / Differentiator	
Tiefpassfilter / Low pass filter	
Hochpassfilter / High pass filter	

(ca. 1 Punkt/point)

b) Die Regelabweichung in einem geschlossenen Standardregelkreis ist abhängig von:

The error signal of a standard feedback control system depends on:

Optionen / Options	Antwort / Answer
Kommando- und Ausgangssignal. Command and output signal.	✓
Kommando- und Eingangsgröße. Command and plant input signal	
Eingangs- und Ausgangsgröße. Plant input and output variable.	
Modelparameter. Model parameters.	

(ca. 1 Punkt/point)

c) Für eine Steuerung gilt:

An open-loop control system has the following property:

Optionen / Options	Antwort / Answer
Die Eingangsgrößen sind abhängig von den Ausgangsgrößen. The input variables are dependent on the output signals.	
Die Eingangsgrößen sind unabhängig von den Ausgangsgrößen. The input variables are independent of the output signals.	✓
Die Eingangsgrößen sind abhängig von der Dimension des Systems. The input variables depend on the size of the system.	
Die Eingangsgrößen sind abhängig von Parameters der Regelstrecke. The input variables depend on plant parameters.	

(ca. 1 Punkt/point)

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!