



**Note:**

- During the attendance check a sticker containing a unique code will be put on this exam.
- This code contains a unique number that associates this exam with your registration number.
- This number is printed both next to the code and to the signature field in the attendance check list.

## Engineering Mechanics 3

**Exam:** EM3 / LRG Master - Aptitude Assessment

**Date:** Friday 7<sup>th</sup> August, 2020

**Examiner:** Prof. F. Holzapfel

**Time:** 15:30 – 17:00

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5

### Working instructions / *Bearbeitungshinweise*

- This exam consists of **22 pages** with a total of **5 problems**.  
Please make sure now that you received a complete copy of the exam.  
*Diese Klausur umfasst 22 Seiten mit insgesamt 5 Aufgaben.*  
*Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.*
- The total amount of achievable credits in this exam is 83 credits.  
*Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 83 credits.*
- Detaching pages from the exam is prohibited.  
*Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.*
- Do not write with either red or green ink or with pencil.  
*Verwenden Sie keine rote oder grüne Tinte, sowie keinen Bleistift.*
- Switch off all electronic devices, store them in your bag and close it.  
*Schalten Sie alle elektronischen Geräte ab und verstauen Sie diese in Ihrer verschlossenen Tasche.*
- Allowed resources: 10 double-sided A4 sheets  
*Zugelassene Hilfsmittel: 10 beidseitig beschriebene DIN A4-Blätter.*

Left room from _____ to _____ / Early submission at _____
---

The following section provides an overview over the notation convention of different parameters that are used within this exam.

- **Position vectors - example:**  $(\mathbf{r}^{GP})_B$   
describes the position of point  $P$  relative to point  $G$ , the  $B$ -frame is the frame in which the components are notated
- **Velocity vectors - example:**  $(\mathbf{v}^{GP})_B^C$   
the velocity of point  $P$  relative to point  $G$  is defined with respect to the  $C$ -frame and notated in the  $B$ -frame
- **Angular velocity - example:**  $(\boldsymbol{\omega}^{OB})_B$   
describes the angular rate of the  $B$ -frame relative to the  $O$ -frame, notated in the  $B$ -frame
- **Angular acceleration - example:**  $(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB})_B^O$   
describes the angular rate differentiated with respect to the  $O$ -frame and notated in the  $B$ -frame
- **Transformation matrices - example:**  $(\mathbf{T})_{BA}$   
first index describes the frame in which the components of the output vector are specified (here:  $B$ )  
second index describes the frame in which the components of the input vector are specified (here:  $A$ )

Der folgende Abschnitt bietet einen Überblick über die Notationskonvention verschiedener Parameter, die in dieser Prüfung verwendet werden.

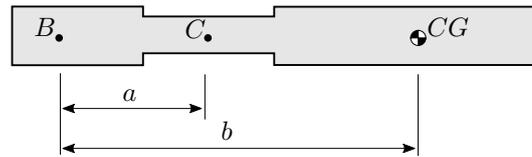
- **Positionsvektor - Beispiel:**  $(\mathbf{r}^{GP})_B$   
*Beschreibt die Position des Punkts  $P$  relativ zum Punkt  $G$ , das  $B$ -System ist das Koordinatensystem, in dem die Komponenten angegeben sind*
- **Geschwindigkeitsvektor - Beispiel:**  $(\mathbf{v}^{GP})_B^C$   
*Die Geschwindigkeit des Punkts  $P$  relativ zum Punkt  $G$  ist definiert im  $C$ -System und angegeben im  $B$ -System*
- **Winkelgeschwindigkeit - Beispiel:**  $(\boldsymbol{\omega}^{OB})_B$   
*Beschreibt die Winkelgeschwindigkeit des  $B$ -Systems relativ zum  $O$ -System, angegeben im  $B$ -System*
- **Winkelbeschleunigung - Beispiel:**  $(\dot{\boldsymbol{\omega}}^{OB})_B^O$   
*Beschreibt die Winkelgeschwindigkeit abgeleitet in Bezug auf das  $O$ -System und angegeben im  $B$ -System*
- **Transformationsmatrizen - Beispiel:**  $(\mathbf{T})_{BA}$   
*Der erste Index beschreibt das Koordinatensystem, in dem die Komponenten des Ausgabevektors angegeben sind (hier:  $B$ )  
Der zweite Index beschreibt das Koordinatensystem, in dem die Komponenten des Eingabevektors angegeben sind (hier:  $A$ )*

## Problem 1 Single Choice (12 credits)

Mark the correct answer to each question.

Kreuzen Sie die richtige Antwort zu jeder Frage an.

a)



The mass center of inertia of the depicted rigid body (mass  $m$ , center of gravity  $CG$ ) with respect to the point  $B$  is  $\Theta^B$ . What is the mass center of inertia  $\Theta^C$  with respect to the point  $C$ ?

Das Massenträgheitsmoment des dargestellten Starrkörpers (Masse  $m$ , Schwerpunkt  $CG$ ) bezüglich des Punktes  $B$  ist  $\Theta^B$ . Welches ist das Massenträgheitsmoment  $\Theta^C$  bezüglich des Punktes  $C$ ?

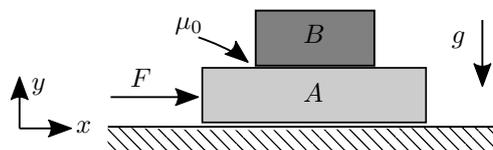
- $\Theta^C = \Theta^B + mb^2$
- $\Theta^C = \Theta^B - mb^2$
- $\Theta^C = \Theta^B - mb^2 + m(b - a)^2$
- $\Theta^C = \Theta^B + m(b - a)^2$
- $\Theta^C = \Theta^B + ma^2 - mb^2$
- $\Theta^C = \Theta^B - ma^2 + mb^2$

b) Which statement is true for every rotation matrix  $R_{ab}$ ?

Welche Aussage gilt für jede Rotationsmatrix  $R_{ab}$ ?

- $\det(R_{ab}) = 0$
- $\det(R_{ab}) = -1$
- $R_{ab} = R_{ab}^T$
- $R_{ba} = R_{ab}^{-1}$
- $R_{ba} = R_{ab}$
- $R_{ab} = -R_{ab}^T$

c)



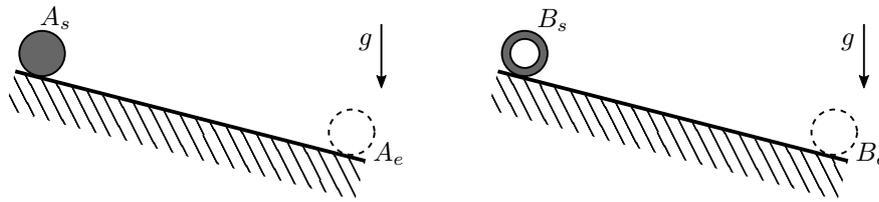
A block of mass  $m_A$  is accelerated by the force  $F$  with  $\ddot{x}_A$ . A block of mass  $m_B$  sticks to block  $A$  (stiction coefficient  $\mu_0$ ). There is a local gravity acceleration  $g$ . What is the magnitude of force between the two blocks in  $x$  direction?

Ein Block der Masse  $m_A$  wird durch die Kraft  $F$  mit  $\ddot{x}_A$  beschleunigt. Ein Block der Masse  $m_B$  haftet auf dem Block  $A$  (Haftreibungskoeffizient  $\mu_0$ ). Es wirkt die lokale Schwerebeschleunigung  $g$ . Wie groß ist die Kraft zwischen den beiden Blöcken in  $x$ -Richtung?

- $\mu_0 m_B g$
- $\mu_0 m_Q g$
- $\mu_0 (m_B + m_A) g$
- $m_B \ddot{x}_A$
- $m_A \ddot{x}_A$

$\mu_0 m_B \dot{x}_A$

d)

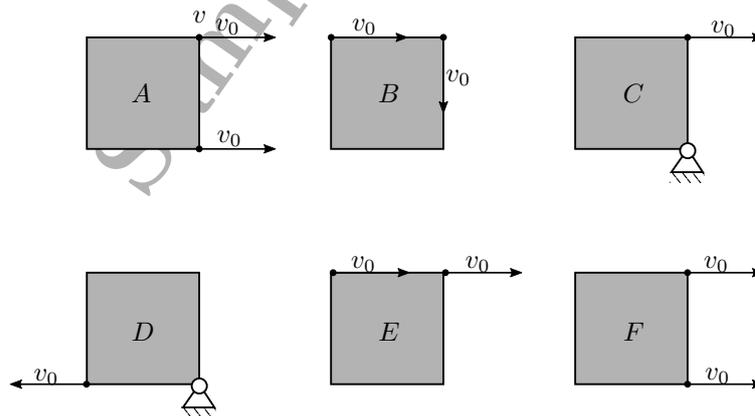


A homogeneous full cylinder  $A$  and a homogeneous hollow cylinder  $B$  with equal mass and diameter are released from the starting point  $A_s$  respectively  $B_s$  at the same time. They roll down a plane of equal slope until they reach the points  $A_e$  respectively  $B_e$  at an equal distance to the starting points. Mark the correct statement for the cylinders at the end points  $A_e, B_e$ .

*Ein homogener Vollzylinder  $A$  und ein homogener Hohlzylinder  $B$  mit gleicher Masse und Außendurchmesser werden gleichzeitig am Startpunkt  $A_s$  bzw.  $B_s$  losgelassen. Sie rollen entlang einer schiefen Ebene gleicher Steigung bis sie nach gleicher Entfernung zum jeweiligen Startpunkt die Endpunkte  $A_e$  bzw.  $B_e$  erreichen. Kreuzen Sie die richtige Aussage bezüglich der Zylinder an den Endpunkten  $A_e, B_e$  an.*

- Both bodies have the same kinetic energy.  
*Beide Körper haben die gleiche kinetische Energie.*
- The full cylinder has a higher kinetic energy.  
*Der Vollzylinder hat eine größere kinetische Energie.*
- The hollow cylinder has a higher kinetic energy.  
*Der Hohlzylinder hat eine größere kinetische Energie.*
- Both bodies have the same velocity.  
*Beide Körper haben die gleiche Geschwindigkeit.*
- The hollow cylinder reaches the end point first.  
*Der Hohlzylinder erreicht den Endpunkt zuerst.*

e)



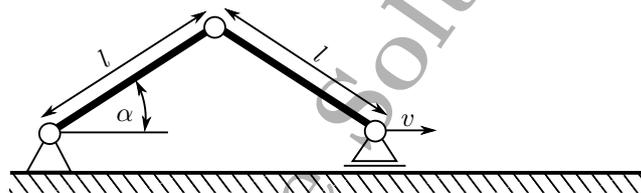
The arrows indicate the velocity of the marked corners of the depicted bodies in the plane. Which bodies are **not** rigid bodies?

*Die Pfeile zeigen die Geschwindigkeiten der markierten Ecken der dargestellten Körper in der Ebene an. Welche Körper sind **keine** Starrkörper?*

- $B$  and  $D$
- $B, D$  and  $F$
- $A$  and  $C$
- $D, A$  and  $F$
- $E$  and  $F$

$B$ ,  $E$  and  $F$

f)



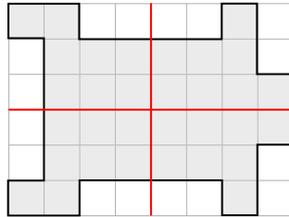
Which statement is true for the above depicted system?

Welche Aussage trifft auf das oben dargestellte System zu?

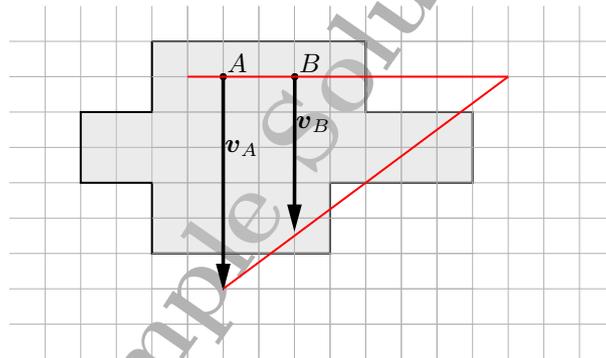
- $l_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} = -\frac{1}{2}v$
- $l_1 \sin(\alpha) \dot{\alpha} = \frac{1}{2}v$
- $l_1 \cos(\alpha) \dot{\alpha} = v$
- $l_1 \cos(\alpha) \dot{\alpha} = -v$
- $l_1 \tan(\alpha) \dot{\alpha} = l_2 v$
- $l_1 \tan(\alpha) \dot{\alpha} = -l_2 v$

## Problem 2 (17 credits)

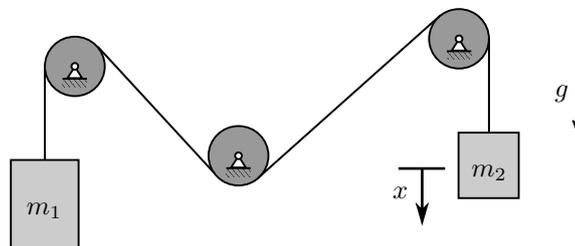
- 0  a) Draw the two principal axes of the moment of inertia to the depicted homogeneous body in the provided sketch.  
 1   
 2  *Zeichnen Sie die beiden Hauptachsen des Trägheitsmoments des dargestellten homogenen Körpers in die gegebene Skizze.*



- 0  b) The sketch depicts the velocity vectors  $v_A$  and  $v_B$  of the points  $A$  and  $B$  of the rigid body. Construct and mark the body's instantaneous center of rotation in the provided sketch.  
 1   
 2  *Die Skizze zeigt die beiden Geschwindigkeitsvektoren  $v_A$  und  $v_B$  der Punkte  $A$  und  $B$  des Starrkörpers. Konstruieren und kennzeichnen Sie den Momentalpol des Körpers in der gegebenen Skizze.*



- 0  c)  
 1   
 2   
 3



Two masses  $m_1$  and  $m_2$  are connected by a mass-free rope that is redirected via friction-free rolls. The two masses are released from steady state and are subject to the local gravity acceleration  $g$ . Determine the vertical acceleration  $\ddot{x}$  of mass  $m_2$ .

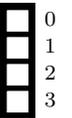
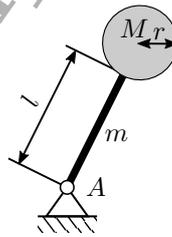
*Die beiden Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind über ein masseloses Seil, das über reibungsfreie Rollen gelenkt wird, verbunden. Die beiden Massen werden aus der Ruhelage losgelassen und es wirkt die lokale Schwerebeschleunigung  $g$ . Bestimmen Sie die vertikale Beschleunigung  $\ddot{x}$  der Masse  $m_2$ .*

Given:  $g, m_1, m_2$

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - F_r \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - F_r \\
 x_1 &= -x_2 \\
 \ddot{x}_1 &= -\ddot{x}_2 \\
 0 &= g - \frac{F_r}{m_1} + g - \frac{F_r}{m_2} \\
 F_r &= 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g
 \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_2 = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

d)



A homogeneous sphere of mass  $M$  and radius  $r$  is mounted to a thin beam of mass  $m$  and length  $l$ . Determine the total system's mass moment of inertia with respect to the point  $A$ .

*Eine homogene Kugel mit Masse  $M$  und Radius  $r$  ist auf einem dünnen Balken mit Masse  $m$  und Länge  $l$  befestigt. Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment des Gesamtsystems bezüglich des Punktes  $A$ .*

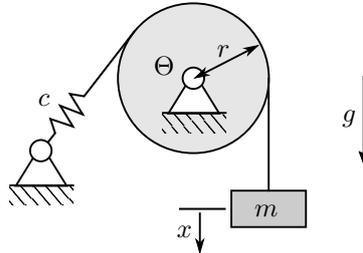
Given:  $M, r, m, l$

$$\begin{aligned}
 \Theta_B^A &= \frac{1}{3} m l^2 \\
 \Theta_S^A &= \frac{2}{5} m r^2 + M (l + r)^2
 \end{aligned}$$

$$\Theta^A = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{2}{5}mr^2 + M(l+r)^2$$

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

e)



A homogeneous roll of radius  $r$  and mass moment of inertia  $\Theta$  is mounted rotatably and friction-free in its center. A mass-free rope connects the mass  $m$  with a linear spring (coefficient  $c$ ). The rope is guided over the roll without sliding. All masses are subject to the local gravity  $g$ . The spring  $c$  is relaxed, until the mass  $m$  is released. Determine the natural angular frequency of the dynamic system as well the steady state solution  $x_0$  of the position of  $m$ .

Eine homogene Walze mit Radius  $r$  und Massenträgheitsmoment  $\Theta$  ist drehbar und reibungsfrei in ihrem Mittelpunkt gelagert. Ein massefreies Seil verbindet die Masse  $m$  mit einer linearen Feder (Federkonstante  $c$ ). Das Seil wird ohne zu gleiten über die Rolle gelenkt. Auf alle Massen wirkt die lokale Schwerebeschleunigung  $g$ . Bevor die Masse  $m$  losgelassen wird, ist die Feder  $c$  entspannt. Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des dynamischen Systems sowie die Ruhelage  $x_0$  der Masse  $m$ .

Given:  $\Theta$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $c$ ,  $g$

$$\text{DGL: } \left( \Theta \frac{1}{r} + m \right) \ddot{x} = mg - cx$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{\Theta \frac{1}{r} + m}}$$

$$x_0 = \frac{mg}{c}$$

- 0
- 1
- 2
- 3

f) A rocket has a total initial mass of  $m_0$ . The rocket's propellant mass ratio  $MR = \frac{m_0}{m_e}$  defines the ratio of the rocket's full mass  $m_0$  and its empty mass  $m_e$ . The propellant is expelled at a constant exhaust velocity  $v_e$  (relative to the rocket) and constant mass flow. The propellant is depleted after time  $T$ . The rocket is subject to a constant gravity  $g$  that always acts in the opposite direction of the rocket's motion. Determine the rocket's thrust  $F$  as well as the rocket's acceleration  $a_T$  at time  $T$ .

Die gesamte Startmasse einer Rakete beträgt  $m_0$ . Das Treibstoffverhältnis  $MR = \frac{m_0}{m_e}$  der Rakete gibt das Verhältnis zwischen der Gesamtmasse  $m_0$  und der Leermasse  $m_e$  an. Der Treibstoff wird mit konstanter

Austrittsgeschwindigkeit  $v_e$  (relativ zur Rakete) und konstantem Massenstrom ausgestoßen. Der Treibstoff ist nach dem Zeitraum  $T$  verbraucht. Es wirkt die konstante Schwerebeschleunigung  $g$ , die stets entgegengesetzt der Bewegung der Rakete wirkt. Bestimmen Sie den Schub der Rakete  $F$ , sowie ihre Beschleunigung  $a_T$  zum Zeitpunkt  $T$ .

Given:  $m_0$ ,  $MR$ ,  $v_e$ ,  $T$ ,  $g$

$$\Delta m = m_0 \left( 1 - \frac{1}{MR} \right)$$
$$\dot{m}_T = \frac{\Delta m}{T}$$
$$F = \dot{m}_T v_e$$

$$F = \frac{v_e m_0 \left( 1 - \frac{1}{MR} \right)}{T}$$
$$a_T = \frac{v_e (MR - 1)}{T} - g$$

Sample Solution

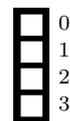


$$\mathbf{T}_{EB} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{BS} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

b) Calculate the position  $(\mathbf{r}^P)_S$  of the south pole (intersection of the negative  $z_E$ -axis and the earth's surface) in the  $S$ -system.

Geben Sie den Ortsvektor  $(\mathbf{r}^P)_S$  des Südpols (Durchstoßpunkt der negativen  $z_E$ -Achse durch die Erdoberfläche) im  $S$ -System an.



$$\begin{aligned} (\mathbf{r}^P)_S &= l \begin{pmatrix} \cos \hat{\gamma}t \\ \sin \hat{\gamma}t \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbf{T}_{BS})^T (\mathbf{T}_{EB})^T \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \\ &= l \begin{pmatrix} \cos \hat{\gamma}t \\ \sin \hat{\gamma}t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \cos \hat{\gamma}t + r \sin \alpha \\ l \sin \hat{\gamma}t \\ -r \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}^P)_S = \begin{pmatrix} l \cos \dot{\gamma} t + r \sin \alpha \\ l \sin \dot{\gamma} t \\ -r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

0   
 1   
 2   
 3

c) Calculate the absolute velocity  $(\mathbf{v}^P)_S$  of the south pole denoted in the  $S$ -system.  
*Bestimmen Sie den Vektor der absoluten Geschwindigkeit  $(\mathbf{v}^P)_S$  des Südpols, angegeben im  $S$ -System.*

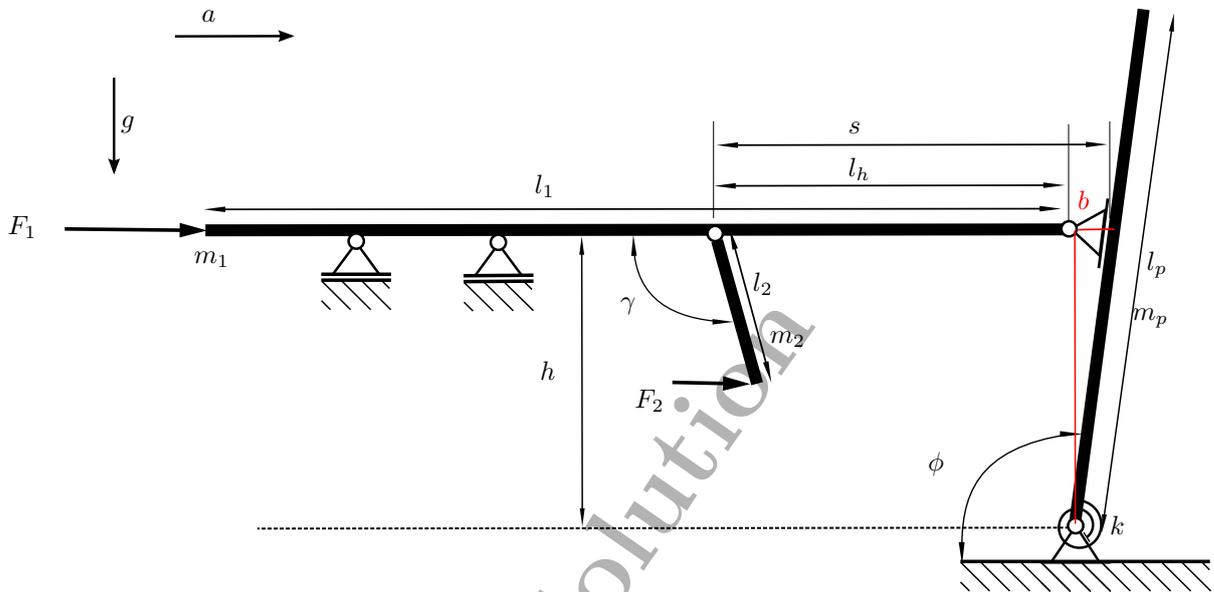
$$(\mathbf{v}^P)_S = \begin{pmatrix} -l \sin \dot{\gamma} t (\dot{\gamma} + \ddot{\gamma} t) \\ l \cos \dot{\gamma} t (\dot{\gamma} + \ddot{\gamma} t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

0   
 1   
 2

d) Calculate the absolute angular velocity of the earth  $(\boldsymbol{\omega}^{Earth})_E$  denoted in the earth-fixed system  $E$ .  
*Bestimmen Sie die absolute Winkelgeschwindigkeit der Erde  $(\boldsymbol{\omega}^{Earth})_E$  im  $E$ -System.*

$$(\boldsymbol{\omega}^E)_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{pmatrix}$$

**Problem 4 (22 credits)**



The above mechanism is mounted on an aircraft to control its pedal's motion. The force  $F_1$  acts on the horizontal homogenous bar of mass  $m_1$  which can move horizontally. This actuates the pedal (also abstracted as a homogenous bar of mass  $m_p$ ). The counteracting forces of the pedal (coming from the aerodynamics) are modeled as a torsional spring of stiffness  $k$ . The spring is fully relaxed at the current configuration  $\phi = \phi_0$ . As part of a sensor mechanism, a third homogenous bar of mass  $m_2$  is tilt-mounted on the horizontal actuator bar. The force  $F_2$  acts horizontally on the tip of the sensor bar. The earth gravity  $g$  is acting and the aircraft is also has an acceleration of  $a$  with respect to the earth surface. In the following, the different terms of the LAGRANGE II mechanics should be determined. The generalized coordinates should be chosen as  $\phi$  and  $\gamma$ .

Die oben dargestellte Mechanismus wird auf einem Flugzeug montiert um die Bewegung des Pedals zu steuern. Die Kraft  $F_1$  wird auf den horizontal, verschiebbar gelagerten homogenen Balken der Masse  $m_1$  aufgebracht. Dieser bewegt das Pedal, das ebenso als ein homogener Balken der Masse  $m_p$  modelliert ist. Die Reaktionskräfte (aerodynamische Kräfte und Momente) sind als eine Drehfeder (mit der Federkonstante  $k$ ) modelliert. Die Feder ist vollständig entspannt in der gegebenen Konfiguration  $\phi = \phi_0$ . Ein dritter homogener Balken mit der Masse  $m_2$  ist auf dem horizontalen Balken gelenkig gelagert. Auf diesen Balken, der Teil einer Sensormechanismus ist, wirkt die horizontale Kraft  $F_3$ . Es wirkt die Erdgravitation  $g$  und das Flugzeug hat auch eine Beschleunigung  $a$  im Bezug auf die Erdoberfläche. Im Folgenden sollen Terme für den LAGRANGE II-Formalismus bestimmt werden. Verwenden Sie dabei die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [\phi, \gamma]^T$

Given:  $\gamma, \dot{\gamma}, \phi, \dot{\phi}, \phi_0, \dot{\phi}_0, m_1, m_2, m_p, l_1, l_2, l_p, s, l_h, F_1, F_2, k, g, a, h$

- a) Determine the kinetic energy of the system  $E_k$ .  
Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems  $E_k$ .

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

$$I_p = \frac{1}{3}m_p l_p^2, \quad I_2 = \frac{1}{12}m_2 l_2^2,$$

$$b = h \tan \phi \Rightarrow \dot{b} = -\frac{h}{\cos^2 \phi}(-\dot{\phi}) = \frac{h}{\cos^2 \phi}(\dot{\phi}) \quad \text{with } \phi \text{ a positive absolute value}$$

$$v_1 = \dot{b} = \frac{h}{\cos^2 \phi} \dot{\phi}$$

$$v_{2x} = \frac{h}{\cos^2 \phi} \dot{\phi} - \frac{l_2}{2} \dot{\gamma} \cos \gamma, \quad v_{2y} = \frac{l_2}{2} \dot{\gamma} \sin \gamma$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 \left( \frac{h}{\cos^2 \phi} \dot{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left( \left( \frac{h}{\cos^2 \phi} \dot{\phi} - \frac{l_2}{2} \dot{\gamma} \cos \gamma \right)^2 + \frac{l_2^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \gamma \right) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}I_p \dot{\phi}^2$$

Sample Solution

$E_k =$  see above

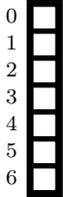
b) Determine the potential energy of the system  $E_p$ .  
Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems  $E_p$ .



$$E_p = m_1 h g + \frac{l_p}{2} \sin \phi m_p g + \left( h - \frac{l_2}{2} \sin \gamma \right) m_2 g + \frac{1}{2} k (\phi - \phi_0)^2 + m_p a \frac{l_p}{2} \cos \phi \\ + \left( s - l_h + h \tan \phi + \frac{l_1}{2} \right) m_1 a + \left( s + h \tan \phi + \frac{1}{2} \cos \gamma \right) m_2 a$$

Sample Solution

$E_p = \text{see above}$



c) Determine the vector of nonconservative forces  $Q_{NK}$ .  
*Bestimmen Sie den Vektor der nichtkonservativen Kräfte  $Q_{NK}$ .*

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \frac{h}{\cos^2 \phi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \frac{h}{\cos^2 \phi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} l_2 \sin \gamma \\ -l_2 \cos \gamma \end{pmatrix}$$

(with  $\phi$  a positive absolute value)

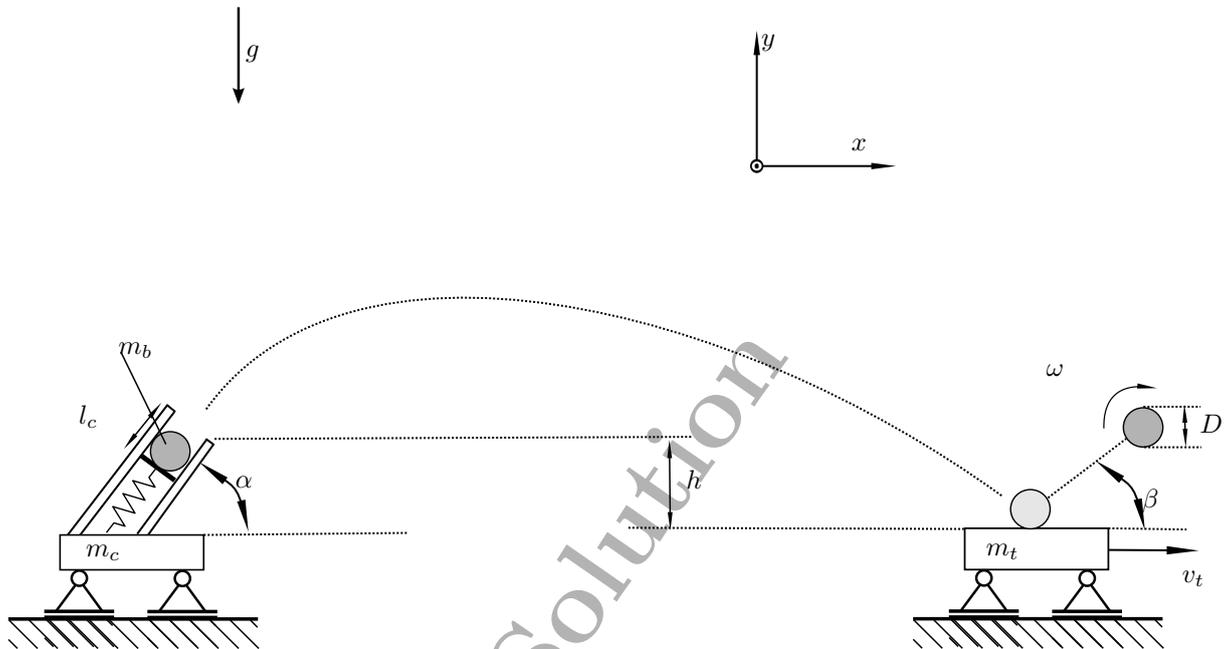
$$Q_{NK_j} = \sum_i F_i^{(e)} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \Rightarrow$$

$$Q_{NK} = \begin{pmatrix} \frac{h}{\cos^2 \phi} (F_1 + F_2) \\ F_2 l_2 (\sin \gamma - \cos \gamma) \end{pmatrix}$$

Sample Solution

$Q_{NK} = \text{see above}$

**Problem 5** (20 credits)



A simple canon is built in a lab experiment and slidably mounted. It shoots a ball of mass  $m_b$  and diameter  $D$ . To do that, a spring is stretched by a length of  $l_c$ . The spring accelerates the ball to a velocity of  $v_0$ . Only on this length, the normal force to the canon's barrel has an effect on the ball. The motion of the ball in the barrel is friction free. After being accelerated on the length  $l_c$  the ball starts a projectile motion. The ball hits a car (with a collision number of  $e$ ), which is also slidably mounted on the surface. The car is located lower than the canon's output by the height of  $h$ . Total stiction acts between the car and the ball at the time of collision. The motion of the canon and the car are friction free. The air gravity of  $g$  is acting. There is no motion in the system at the beginning. The air drag is negligible.

*Eine einfache Kanone ist für ein Laborexperiment reibungsfrei verschiebbar gelagert. Die Kanone schießt einen Ball mit der Masse  $m_b$  und Radius  $D$  auf einen Wagen, der ebenfalls reibungsfrei verschiebbar gelagert ist. Der Ball kann sich reibungsfrei durch die Kanone bewegen. In der Kanone befindet sich eine um die Strecke  $l_c$  gestauchte Feder. Die Feder beschleunigt den Ball auf eine Geschwindigkeit  $v_0$ , mit der der Ball die Kanone verlässt. Ausgehend von der ursprünglichen Lage des Balls, wirkt die Kanone nur über diese Länge eine Normalkraft auf den Ball. Der Ball trifft den Wagen, wobei es zu einem rauen Stoß mit der Stoßzahl  $e$  kommt. Während des Stoßes haftet der Ball an der Wand. Es wirkt die Erdgravitation  $g$ . Zu Beginn sind alle Körper in Ruhe. Der Ball ist homogen und hat die Masse  $m$ . Die Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.*

Given:  $\alpha, m_b, l_c, h, m_c, m_t, D, g, e$

- a) Determine the velocity of the Ball immediately after it is shot by the canon  $v_0$ .  
*Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balls unmittelbar nach dem er von der Kanone geschossen wurde  $v_0$ .*

0
1
2
3
4

conservation of energy:

$$\frac{1}{2}kl_c^2 - gl_c \sin \alpha m_b = \frac{1}{2}m_c V_c^2 + \frac{1}{2}m_b V_b^2$$

conservation of linear momentum:

$$m_c V_c = m_b V_b \cos \alpha \Rightarrow V_c = \frac{m_b}{m_c} \cos \alpha V_b$$

$$\frac{1}{2}kl_c^2 - gl_c \sin \alpha m_b = \frac{1}{2}V_b^2 \left( \frac{m_b^2}{m_c} \cos^2 \alpha + m_b \right)$$

$$V_b = \sqrt{\frac{kl_c^2 - 2gl_c \sin \alpha m_b}{\frac{m_b^2}{m_c} \cos^2 \alpha + m_b}}$$

Sample Solution

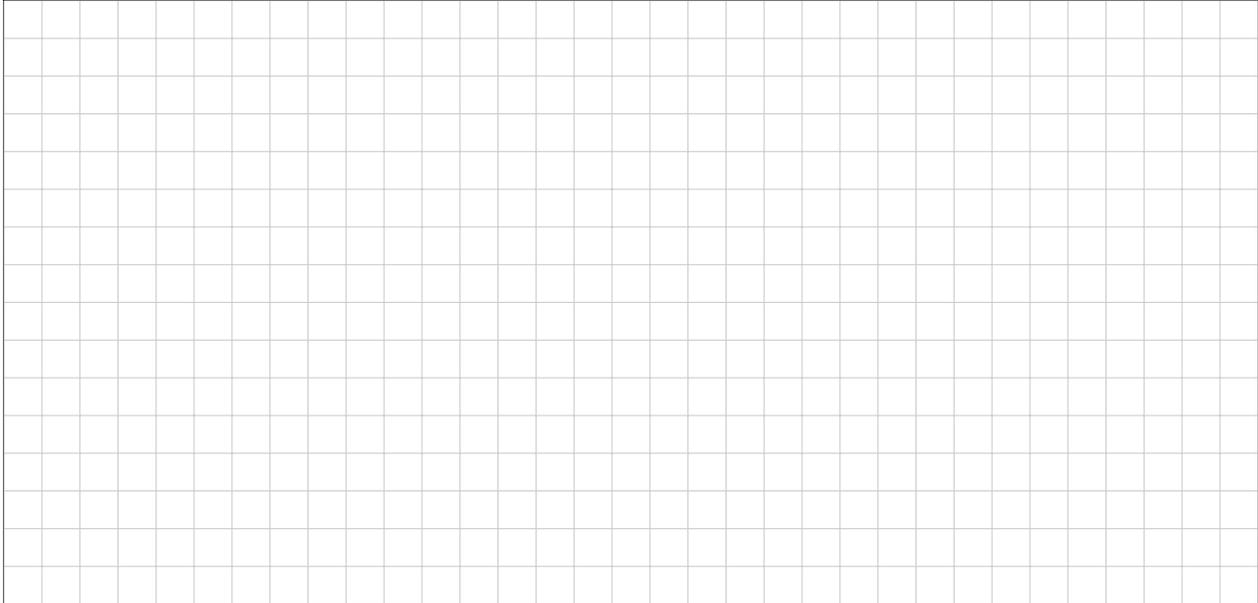
$$v_0 = v_b$$

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

b) Determine the angular velocity of the ball after the collision  $\omega$  and the angle  $\beta$  immediately after the collision. Assume  $v_0$  given for this subproblem. Do not use your result from the previous subproblem.

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Balls nach dem Stoß  $\omega$  und den Winkel  $\beta$  unmittelbar nach dem Stoß. Nehmen Sie  $v_0$  von der vorherigen Teilaufgabe als gegeben an. Verwenden Sie nicht Ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

$x = v_0 t \cos \alpha$   
 $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \stackrel{!}{=} -h$   
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t + h = 0$   
 $\Rightarrow t_s = \frac{-v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{-g}$  time of collision  
 colision velocity  $v_{x_s} = v_0 \cos \alpha$   
 $v_{y_s} = v_0 \sin \alpha - g t_s \Rightarrow v_{y_1} = e(v_0 \sin \alpha - g t_0)$   
 $I_b = \frac{2}{5} m_b \left(\frac{D}{2}\right)^2$   
 1. kinematik  $\omega \frac{D}{2} + v_{1_x} = v_t$   
 2. Angular Momentum  $I_b \omega = \frac{D}{2} v_t m_t$   
 3. Linear Momentum  $m_b v_0 \cos \alpha = v_{1_x} m_b + v_t m_t$   
 1 in 2:  $I_b \omega = \frac{D}{2} m_t (v_{1_x} - \omega \frac{D}{2}) \Rightarrow \left(I_b + \frac{D^2}{4} m_t\right) \omega = \frac{D}{2} m_t v_{1_x}$   
 $\Rightarrow v_{1_x} \frac{2}{D m_t} \left(I_b + \frac{D^2}{4} m_t\right) \omega$   
 1,2 and 3:  $m_b v_0 \cos \alpha = v_{1_x} m_b + (v_{1_x} - \omega \frac{D}{2}) m_t$   
 $m_b v_0 \cos \alpha = (m_b + m_t) v_{1_x} - \omega \frac{D}{2} m_t$   
 $m_b v_0 \cos \alpha = \left(\frac{2(m_b + m_t)}{D m_t}\right) \left(I_b + \frac{D^2}{4} m_t\right) + \frac{D}{2} m_t \omega$   
 $\omega = \left(\frac{2(m_t + m_b)}{D m_t}\right) \left(I_b + \frac{D^2}{4} m_t\right)^{-1} m_b v_0 \cos \alpha$   
 $\beta = \arctan \frac{v_{1_y}}{v_{1_x}}$



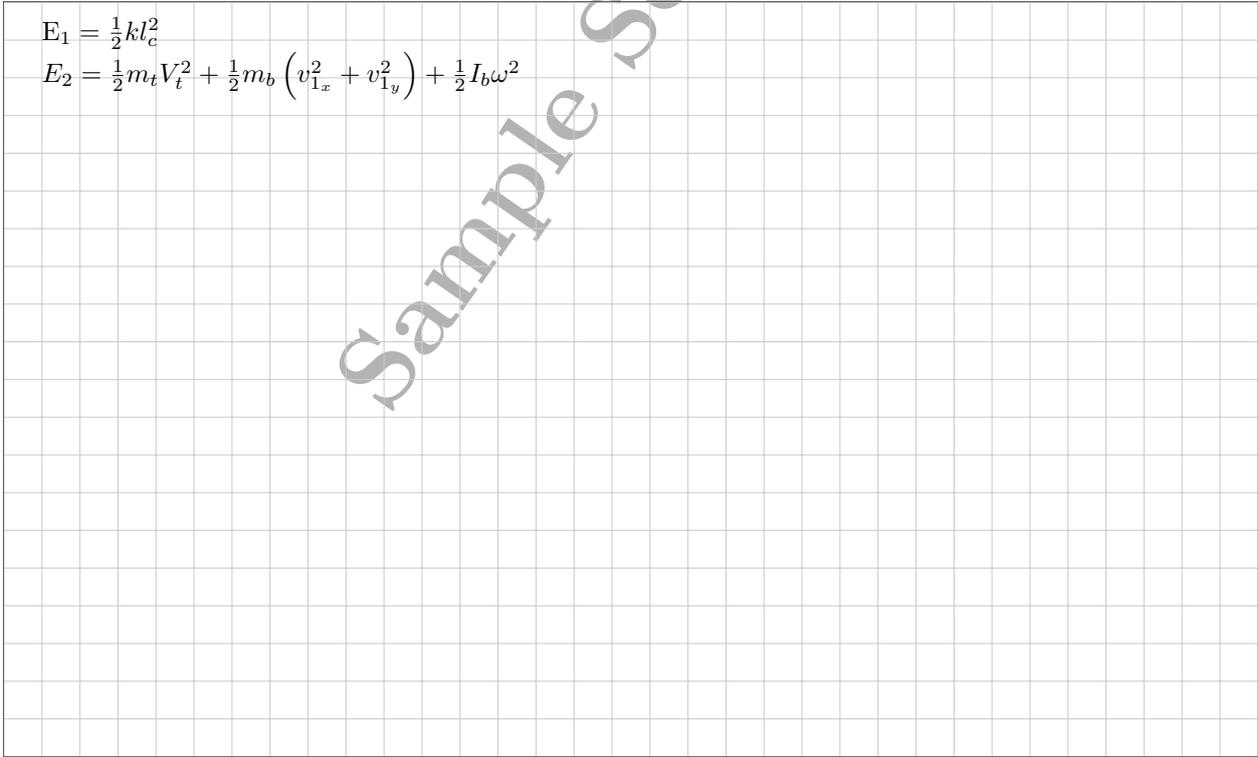
$\omega =$  see above

$\beta =$  see above

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- c) Determine the amount of kinetic energy  $E_c$  that is dissipated during the collision. Assume the velocity of the target  $v_t$  after the collision given.  
*Bestimmen Sie die kinetische Energie  $E_c$ , die während des Stoßes dissipiert wird. Nehmen Sie hierbei die Geschwindigkeit  $v_t$  des Wagens (Target) nach dem Stoß als gegeben an.*

$$E_1 = \frac{1}{2}kl_c^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m_t v_t^2 + \frac{1}{2}m_b (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}I_b \omega^2$$



$$E_c = E_1 - E_2$$

Additional space for solutions—clearly mark the (sub)problem your answers are related to and strike out invalid solutions.



*Sample Solution*

*Sample Solution*