Lehrstuhl für Raumfahrttechnik
Fakultät für Luftfahrt, Raumfahrt und Geodäsie
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:
- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Höhere Mathematik

Klausur: LRXXXX / Eignungsprüfung **Datum:** Sonntag, 31. Februar 2999
Prüfer: Prof. Dr. Ulrich Walter **Uhrzeit:** 10:00 – 11:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A 10	A 11	A 12	A 13
I													

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **13 Seiten** mit insgesamt **13 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **nicht-programmierbarer Taschenrechner**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Auch Textaufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte inklusive Smart Watches vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.
- Bei Multiple Choice Fragen ist immer nur eine Antwort richtig.
- Zusätzlicher Platz für Lösungen ist am Ende der Klausur gegeben. Wird er benötigt, geben Sie dies in der Lösungsbox der Aufgabe an und referenzieren die Aufgabe bei der Lösung.

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

- Intentionally left blank -

Aufgabe 1 **Kurzfragen (8 Punkte)**

Wählen Sie ohne Angabe des Rechenwegs die Lösung der folgenden Kurzfragen aus. Pro Frage ist nur eine Antwort richtig.
Einen Punkt für jede richtige Frage ①.

a) Lösen Sie $e^{\frac{5\pi}{2}i}$.

- [ ] $-1 + 1i$
- [ ] $0 - i$
- [ ] $1 + 0i$
- [x] $0 + i$

b) Den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

- [ ] 0
- [ ] ∞
- [x] 2
- [ ] π

c) Nullstellen von $x^3 + 4x$, $x \in \mathbb{C}$.

- [ ] $[2i]$
- [x] $[0, -2i, 2i]$
- [ ] $[0, 2, -2]$
- [ ] $[0]$

d) Lösung von $\frac{x^2+1}{\sin x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- [ ] $[0]$
- [ ] $[i, -i]$
- [ ] $[-2, 0, 2]$
- [x] $\emptyset$

e) Die Inverse E^{-1} von $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

- [ ] $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- [x] $\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

f) Die Determinate $\det(F)$ der Matrix $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

- [ ] 42
- [ ] 17
- [ ] -4
- [x] 0

g) Den Grenzwert $\lim_{x\to 2+} \frac{x^2-4}{x-2}$.

- [ ] ∞
- [x] 4
- [ ] $-\infty$
- [ ] 0

h) Wählen Sie die Fourierreihendarstellung einer sinusförmigen Wechselspannung mit 0 V – 230 V und 60 Hz aus.

- [ ] $0 - 230 \exp(120 i\pi t)$
- [x] $115 + 115 \exp(120 i\pi t)$
- [ ] $115 - 230 \exp(60 i\pi t)$
- [ ] $115 - 115 \exp(60 i\pi t)$

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Aufgabe 2 **Matrizenoperationen (4 Punkte)**

0 1 2 3 4

Bilden Sie - sofern möglich - mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ausdrücke

$$A + C, \qquad 2B, \qquad A(y + z), \qquad C(-4z).$$

$$A + C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \; 1 \qquad 2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} \; 1 \qquad A(x + y) = Ax + Ay = \begin{pmatrix} -31 \\ 41 \\ -26 \end{pmatrix} \; 1$$

$$C(-4z) = -4Cz = \begin{pmatrix} -44 \\ 16 \\ -76 \end{pmatrix} \; 1$$

Aufgabe 3 Skalar- und Vektorprodukt (5 Punkte)

Es seien $a = (1, 0, 2)^\top$ und $b = (1, 2, 0)^\top$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie

a) das Vektorprodukt c und das Skalarprodukt d der Vektoren a und b.

0 1 2

Vektorprodukt: $c = a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ①

Skalarprodukt: $d = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 1$ ①

b) den Kosinus des Winkel α zwischen den Vektoren a und b.

0 1

$\cos \alpha = \frac{\|a \cdot b\|}{\|a\| \; \|b\|} = \frac{\|d\|}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ ①

c) den Flächeninhalt A des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

0 1

Der Flächeninhalt ist die L_2-Norm des Vektorprodukts.

$A = \|a \times b\|_2 = \sqrt{24}$ ①

d) einen Einheitsnormalenvektor n auf a und b.

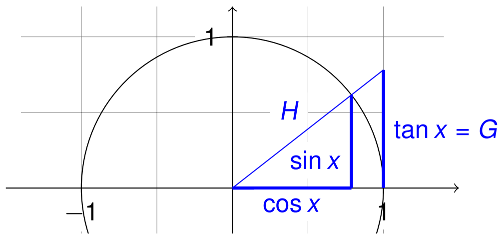
0 1

$n = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ①

Aufgabe 4 Trigonometrie (3 Punkte)

0
1

a) Zeichnen Sie Sinus, Kosinus und Tangens eines beliebigen Wertes x in das Diagramm ein.



Die richtige Grafik gibt eine Punkt. ①

0
1
2

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Pythagoras, dass die folgende Gleichung wahr ist.

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

Der Sinus ist als Quotient von Gegenkathete G über Hypotenuse H definiert.

Der Satz des Pythagoras am Einheitskreis liefert für die Hypotenuse

$H = \sqrt{1 + \tan^2 x}$①

Somit gilt für den Sinus:

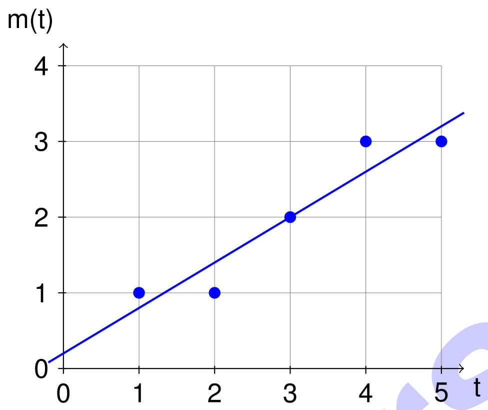
$\sin x = \frac{G}{H} = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$①

Aufgabe 5 Lineare Regression (4 Punkte)

Es sei

t	1	2	3	4	5
m(t)	1	1	2	3	3

eine zeitabhängige Messreihe. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade. Tragen Sie die Punkte und die Gerade in das gegebene Diagramm ein.



Gesucht ist die Gleichung $m(t) = x_0 + x_1 t$, somit eine Lösung des LGS: $Ax = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} ①$$

Lösen des LGS: $A^\top Ax = A^\top y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 36 \end{pmatrix} \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ ①

Somit gilt: $m(t) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}t$①

Die richtige Grafik bekommt auch einen Punkt.①

Aufgabe 6 Grenzwerte (2 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - x}$

L'Hopital $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$ ①

$2x - \sqrt{4x^2 - x} = \frac{4x^2 - 4x^2 + x}{x\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{4}$ ①

Aufgabe 7 Abbildungen (2 Punkte)

Wählen Sie ohne Angabe des Rechenwegs die Lösung der folgenden Kurzfragen aus. Pro Frage ist nur eine Antwort richtig.
Ein Punkt für jede richtige Antwort ①.

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \mapsto n$ ist

- ☐ nur surjektiv.
- ☐ nur injektiv.
- ☐ weder injektiv noch surjektiv.
- ☒ bijektiv.

Die Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \mapsto n^2$ ist

- ☐ nur surjektiv.
- ☐ nur injektiv.
- ☒ weder injektiv noch surjektiv.
- ☐ bijektiv.

Aufgabe 8 Ableitung (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \ln(\sin x) - x\cos(x)$$
$$g(x) = -8\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4\ln(x+3)$$
$$h(x) = x^2\tan(x)$$

$f'(x) = \cot(x) - \cos(x) + x\sin(x)$①

$g'(x) = -8 + \frac{16}{x^2} + \frac{4}{x+3}$①

$h'(x) = 2x\tan(x) + \left(\frac{x}{\cos(x)}\right)^2$ ①

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

Bestimmen von Gradient f: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$ ①

Und Hessematrix $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$①

Kritische Stellen sind Nullstellen des Gradienten: $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} y = x^2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}$ ergibt $(0,0)$ und $(1,1)$.①

Punkt $(0,0)$ in Hessematrix: Negative Determinante -> Sattelpunkt①

Punkt $(1,1)$ in Hessematrix: Positive Determinante und positive Spur -> lokales Minimum①

Aufgabe 9 Integration (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie das folgende bestimmte und unbestimmte Integral.

(a) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

(b) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx$

$\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = 1+e^x \\ du = e^x dx \end{bmatrix}$ ① $= \int_1^{1+e} \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}$ ①

$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$ ① $= -\frac{\ln(x^2)}{x} + 2\int \frac{1}{x^2} + C = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x} + C$ ①

Aufgabe 10 Reihen und Folgen (1 Punkt)

0 1

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Folge und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

$$a_n = \frac{(4n+3)(n-2)}{n^2+n-2}$$

Konvergiert, mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$ ①

Aufgabe 11 Fourierreihen (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourierreihenentwicklung $F(x)$ der 2π-periodischen Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Tipp: Beachten Sie, dass die Funktion $f(x)$ gerade, d.h. achsensymmetrisch ist.

Die allgemeine Formel einer Fourier Reihe ist $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$.①

$f(x)$ ist gerade deshalb gilt $b_k = 0$ und $a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(k\frac{T}{2\pi}x\right)dx$.①

Man erhält $a_0 = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{3}$①

Und $a_k = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\cos(kx)dx = \frac{2}{k^2}(-1)^k$.①

Die Fourierreihe von f lautet somit $F(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$.①

Aufgabe 12 Taylorreihe (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + \sin(x)\cos(y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_{2,f,a}(x, y)$ zum Punkt $a = (0, 0)^\top$.

Taylorpolynom: $T_{2,f,a}(x) = f(a) + \nabla f(a)^\top(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^\top Hf(a)(x-a)$

Partielle Ableitungen bis 2. Ordnung: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + \cos x\cos y \\ 6y - \sin x \sin y \end{pmatrix}$①

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - \sin x\cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x\sin y & 6 - \sin x\cos y \end{pmatrix}$①

Auswertung am Punkt a: $f(a) = 0$, $\quad \nabla f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad Hf(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$①

Somit ist $T_{2,f,a}(x) = 0 + (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y$①

Aufgabe 13 **Differentialgleichungen (10 Punkte)**

0 1 2 3

a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Separation der Variablen.

$$\dot{x} = e^x \sin(t) \text{ mit } x(0) = 0$$

Integration nach Trennung der Variablen $\int e^{-x}dx = \int \sin(t)dt \Leftrightarrow -e^{-x} = -\cos(t) + c$.①

Auflösen ergibt $x(t) = -\ln(\cos(t) + c)$.①

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $c = 0$, somit $x(t) = -\ln(\cos(t))$.①

0 1 2 3 4 5 6 7

b) Geben Sie eine allgemeine Lösung für die folgende Differentialgleichung an

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = \sin(t)$$

Die Lösung ist die Summe der homogenen und partikulären Lösung: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.①

Lösen des charateristischen Polynoms $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ liefert $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$.①

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL $x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{6t}$.①

Die partikuläre Lösung kann mit dem Ansatz $\begin{aligned} x_p(t) &= A\cos t + B\sin t \\ \dot{x}_p(t) &= -A\sin t + B\cos t \\ \ddot{x}_p(t) &= -A\cos t - B\sin t \end{aligned}$ gefunden werden.①

Einsetzten in die DGL ergibt $(-A - 7B + 6A)\cos t + (-B + 7A + 6B)\sin t = \sin t$.①

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = \frac{7}{74}$ und $B = \frac{5}{74}$.①

Somit ist die allgemeine Lösung $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{6t} + \frac{7}{74}\cos t + \frac{5}{74}\sin t$.①

Zusätzlicher Lösungsraum (Benutzung bei Bedarf).