Professorship of Lunar and Planetary Exploration
TUM School of Engineering and Design
Technical University of Munich

Higher Mathematics
Höhere Mathematik

Exam: X / Example Exam - Beispielprüfung **Date:** Sunday 1st January, 2023
Examiner: Prof. Dr.-Ing. P. Reiss **Time:** 09:00 – 10:00

Surname / Nachname	
First name / Vorname	
Seat / Sitzplatz	

	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12
I												

Working instructions

- Instructions are provided in German and English. You may answer in German or English.
  Angaben sind auf Deutsch und Englisch gegeben. Sie dürfen auf Deutsch oder Englisch antworten.
- This exam consists of 16 pages with a total of **12 problems**.
  Please make sure now that you received a complete copy of the exam.
  Diese Klausur umfasst 16 Seiten mit insgesamt **12 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- The total amount of achievable credits in this exam is 60 credits.
  Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 credits.
- Detaching pages from the exam is prohibited.
  Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Allowed resources:
  Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - one **non-programmable pocket calculator**
    ein **nicht-programmierbarer Taschenrechner**
  - one **analog dictionary** English ↔ native language **without annotations**
    ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- **Only those answers are accepted, for which the solution path is recognizable in writing**, unless explicitly stated otherwise.
  Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist, sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt.
- Do not write with red or green colors nor use pencils.
  Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Physically turn off all electronic devices, put them into your bag and close the bag.
  Schalten Sie alle elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.
- Additional space for solutions is provided on the last two of the exam.
  Zusätzlicher Platz für Lösungen ist auf den beiden letzten Seite der Klausur gegeben.

Left room from __________ to __________ / Early submission at __________

Intentionally left blank - Absichtlich freigelassen

Problem 1 **Matrix operations** - Matrizenoperationen **(4 credits)**

Form - if possible - with the matrices
Bilden Sie - sofern möglich - mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

and vectors
und den Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

the expressions
die Ausdrücke

$$A + C, \qquad 2\,B, \qquad A\,(y + z), \qquad C\,(-4\,z).$$

$$A + C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} ① \qquad 2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -14 \end{pmatrix} ① \qquad A(x + y) = Ax + Ay = \begin{pmatrix} -31 \\ 41 \\ -26 \end{pmatrix} ①$$

$$C(-4z) = -4Cz = \begin{pmatrix} -44 \\ 16 \\ -76 \end{pmatrix} ①$$

Problem 2 Eigenvalues and eigenvectors - Eigenwerte und Eigenvektoren (3 credits)

0 1 2 3

Determine the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix
Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Characteristic polynomial: $\chi_A = det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$①

The root $\chi_A = 0$ are the eigenvalues, hence $\lambda = 2$ is the eigenvalue with multiplicity 2.①

Eigenvector is the kernel of the characteristic matrix.

Thus $Eig_A(2) = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.①

Problem 3 Limits - Grenzwerte (2 credits)

0 1 2

Determine the following limits
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - x}$

L'Hopital $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$①

$2x - \sqrt{4x^2 - x} = \frac{4x^2 - 4x^2 + x}{x\left(2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{4}$①

Problem 4 Dot and cross product - Skalar- und Vektorprodukt (5 credits)

Let **a** and **b** be two vectors in $\mathbb{R}^3$ with
Es seien **a** und **b** zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1)^\top, \qquad \mathbf{b} = (0, -1, 1)^\top.$$

Determine:
Bestimmen Sie:

a) the cross product **c** and the dot product d of the vectors **a** and **b**.
das Vektorprodukt **c** und das Skalarprodukt d der Vektoren **a** und **b**.

0 1 2

Cross product: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ①

Dot product: $d = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 1$ ①

b) the cosine of the angle α between the vectors **a** and **b**.
den Kosinus des Winkel α zwischen den Vektoren **a** und **b**.

0 1

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{d}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ①

c) the area A of the parallelogram between the two vectors **a** and **b**.
den Flächeninhalt A des von den Vektoren **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms.

0 1

The area is the L_2-norm of the vector product.

$A = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{3}$ ①

d) the unit normal vector **n** on **a** and **b**.
den Einheitsnormalenvektor **n** auf **a** und **b**.

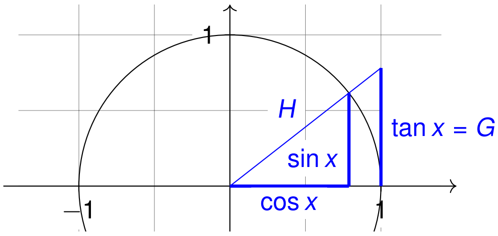
0 1

$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ①

Problem 5 Trigonometry - Trigonometrie (3 credits)

0
1

a) Draw the sine, cosine and tangent of a arbitrary value x into the diagram below
Zeichnen Sie Sinus, Kosinus und Tangens eines beliebigen Wertes x in das Diagramm ein.



One point for the correct diagram. ①

0
1
2

b) Show that the following equation holds true using the Pythagorean theorem
Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Pythagoras, dass die folgende Gleichung wahr ist.

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

The Sine is defined as the quotient of the opposite G over the hypotenuse H

The Pythagorean theorem for the unit circle yields as hypotenuse

$H = \sqrt{1 + \tan^2 x}$①

Thus holds true for the sine:

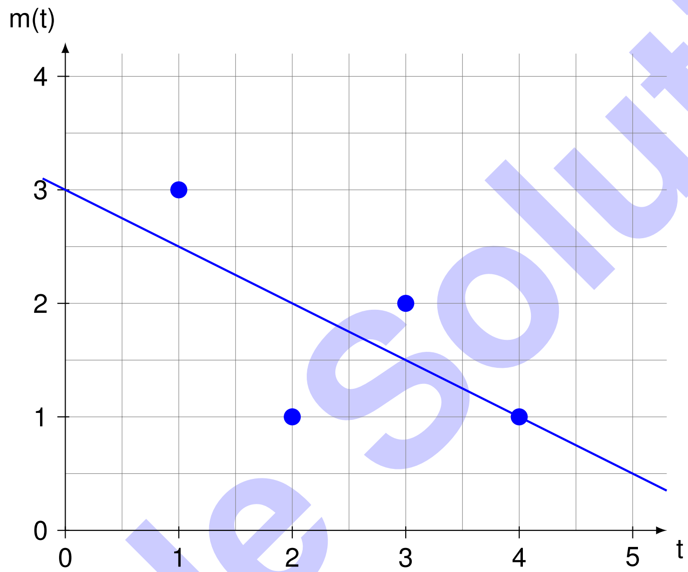
$\sin x = \frac{G}{H} = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$①

Problem 6 Linear regression - Lineare Regression (4 credits)

Let
Es sei

t_i	1	2	3	4
$m(t_i)$	3	1	2	1

be a time series of measurements. Determine the linear regression expression $m(t)$. Plot the points and the solution of the regression in the provided diagram below.
eine zeitabhängige Messreihe. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $m(t)$. Tragen Sie die Punkte und die Lösung der Regression in das gegebene Diagramm ein.



Searched for is the equation $m(t) = x_0 + x_1 t$, therefore the solution of the linear system: $\mathbf{Ax=y}$ with

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1x \end{bmatrix} \text{①}$$

Solving the linear system: $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ ①

Thus: $m(t) = 3.0 - 0.5\,t$ ①

One point for the correct graphic. ①

Problem 7 Differentiation - Ableitung (8 credits)

0 1 2 3

a) Calculate the first derivative of the following functions
Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \ln(\sin x) - x\cos(x)$$
$$g(x) = -8\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4\ln(x+3)$$
$$h(x) = x^2\tan(x)$$

$f'(x) = \cot(x) - \cos(x) + x\sin(x)$①

$g'(x) = -8 + \frac{16}{x^2} + \frac{4}{x+3}$①

$h'(x) = 2x\tan(x) + \left(\frac{x}{\cos(x)}\right)^2$①

0 1 2 3 4 5

b) Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be given by
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Determine the coordinates of all local extrema of f.
Bestimmen Sie die Koordinaten alle lokalen Extrema von f.

Determination of gradient f: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$ ①

And Hessian matrix $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$①

Critical points are roots of the gradient: $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} y = x^2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$ gives $(0, 0)$ and $(1, 1)$.①

Point $(0, 0)$ in Hessian matrix: Negative determinant -> saddle point at $f(0, 0) = 0$①

Point $(1, 1)$ in Hessian matrix: Positive determinant and positive trace -> local minimum at $f(1, 1) = -1$①

Problem 8 Integration

Integration (4 credits)

Calculate the following specific and unspecific integral

Berechnen Sie das folgende bestimmte und unbestimmte Integral.

(a) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

(b) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx$

0 1 2 3 4

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \begin{bmatrix} u = 1 + e^x \\ du = e^x dx \end{bmatrix} 1 = \int_1^{1+e} \frac{1}{u^2} du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} 1$$

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} 1 = -\frac{\ln(x^2)}{x} + 2\int \frac{1}{x^2} + C = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x} + C 1$$

Problem 9 Newton method - Newtonverfahren (6 credits)

Let $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ be
Gegeben sei $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 2$$

Newton's method shall be used to approximate the root of f in the given interval. Use $x_0 = 1.25$ as starting point.
Das Newtonverfahren soll angewendet werden um die Nullstelle von f im gegeben Interval zu berechnen. Nutzen Sie $x_0 = 1.25$ als Startpunkt.

a) Perform the first two iterations of Newton's method to obtain x_2 and calculate the error to the true root.
Führen Sie die ersten zwei Iterationen des Newtonverfahrens aus um x_2 zu erhalten und berechnen Sie den Fehler zur wahren Nullstelle.

Newton's methos is $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ①

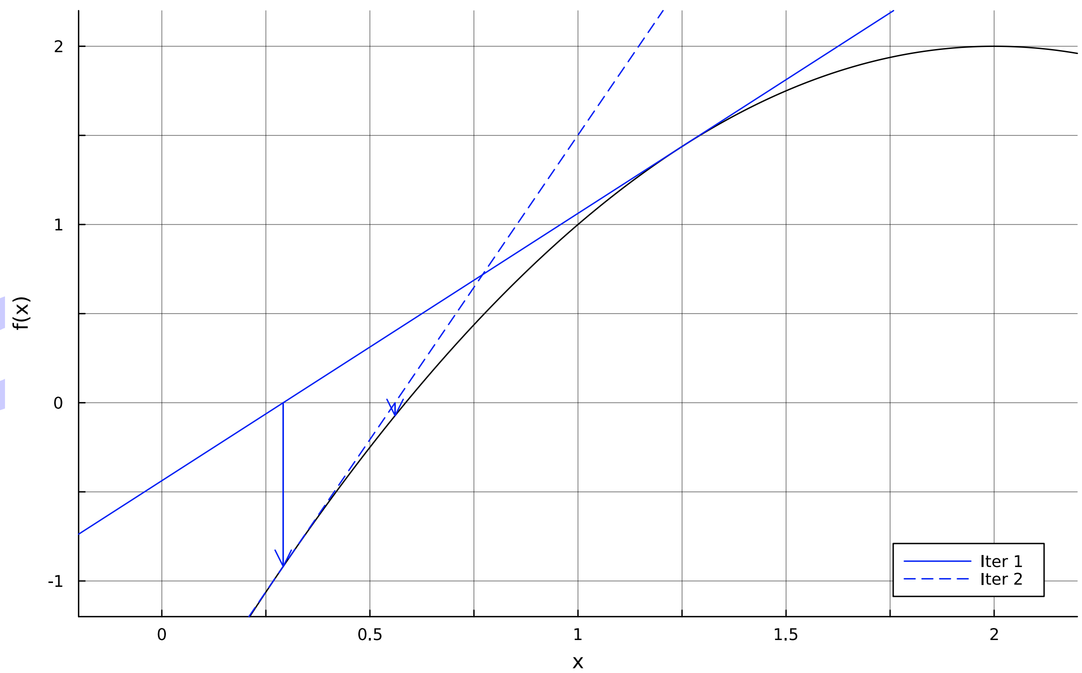
The functions's first derivative is $f'(x) = -2(x - 2)$.①

Thus, $x_1 = 1.25 - \frac{f(1.25)}{f'(1.25)} = 0.292$

And $x_2 = 0.292 - \frac{f(0.292)}{f'(0.292)} = 0.560$①

As the true root is $x = 0.586$ the error is thus $\epsilon = 0.586 - 0.560 = 0.025$①

b) Draw the first two iterations of Newton's method into the diagram below.
Zeichnen Sie die ersten beiden Iterationen des Newtonverfahrens in das gegebene Diagramm ein.



Problem 10 Taylor series - Taylorreihe (4 credits)

0
1
2
3
4

Let
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

be given by
gegeben durch

$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + \sin(x)\cos(y).$$

Determine the second order Taylor polynomial
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades

$$T_{2,f,a}(x, y)$$

at point
zum Punkt

$$a = (0, 0)^\top$$

.

Taylor polynomial: $T_{2,f,a}(x) = f(a) + \nabla f(a)^\top (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^\top Hf(a)(x - a)$

Partial derivative up to 2. order: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + \cos x \cos y \\ 6y - \sin x \sin y \end{pmatrix}$ ①

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - \sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & 6 - \sin x \cos y \end{pmatrix}$ ①

Evaluation at point a: $f(a) = 0$, $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Hf(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ①

Yielding $T_{2,f,a}(x, y) = 0 + (1, 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y$ ①

Problem 11 **Differential equations - Differentialgleichungen (10 credits)**

0 1 2 3

a) Solve the following initial value problem by separation of variables
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Separation der Variablen.

$$\dot{x} = e^{x} \sin(t), \qquad x(0) = 0$$

Integration after separation of the variables $\int e^{-x}dx = \int \sin(t)dt \Leftrightarrow -e^{-x} = -\cos(t) + c$.①

Solving results in $x(t) = -\ln(\cos(t) + c)$.①

Inserting the initial condition yields $c = 0$, thus $x(t) = -\ln(\cos(t))$.①

0 1 2 3 4 5 6 7

b) Provide a general solution to the following differential equation
Geben Sie eine allgemeine Lösung für die folgende Differentialgleichung an

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = \sin(t)$$

The solution is the sum of homogeneous and particular solution: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.①

Solution of characteristic polynomial $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ yields $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 6$.①

The general solution of the homogeneous ODE is then $x_h(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{6t}$.①

The particulate solution can be solved with the approach $\begin{aligned} x_p(t) &= A\cos t + B\sin t \\ \dot{x}_p(t) &= -A\sin t + B\cos t \\ \ddot{x}_p(t) &= -A\cos t - B\sin t \end{aligned}$.①

Insertion in the ODE results in $(-A - 7B + 6A)\cos t + (-B + 7A + 6B)\sin t = \sin t$.①

A comparison of coefficients provides $A = \frac{7}{74}$ $B = \frac{5}{74}$.①

The general solution is then $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{6t} + \frac{7}{74}\cos t + \frac{5}{74}\sin t$.①

Problem 12 **Stochastik - Stochastic (7 credits)**

a) You manufacture sensors with two different lines and produce 30 pieces of which 10 come from line 1. From this amount, you remove 3 sensors with one grip. What is the probability that at least 2 sensors come from line 2?
Sie stellen Sensoren mit zwei verschiedenen Anlagen her und produzieren 30 Stück von denen 10 aus Anlage 1 stammen. Sie entnehmen aus dieser Menge mit einem Griff 3 Bauteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammen mindestens 2 Sensoren aus Anlage 2?

0 1 2 3

The formula for drawing without replacing is $P(E_r) = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-R}}{\binom{N}{n}}$

The probabilities are disjunkt: $P(\text{at least 2}) = P(E_2) + P(E_3)$

With $N = 30$, $R = 20$, $n = 3$ and $r = 2$ or 3

One finds: $P(\text{at least 2}) = \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} + \frac{\binom{20}{3}\binom{10}{0}}{\binom{30}{3}} \approx 75\,\%$

b) Let
Es sei

$$x = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5]$$

be a series of measurements. Determine its mean, median, variance, and standard deviation.
eine Messreihe. Bestimmen Sie deren Median, Mittelwert, Varianz und Standardabweichung.

0 1 2 3 4

Median 4

Mean 3

Variance $\frac{16}{7} \approx 2.3$

standard deviation $\sqrt{\frac{16}{7}} \approx 1.5$

Additional solution space (Indicate usage in problem box).
Zusätzlicher Lösungsraum (Bei Benutzung bitte in Lösungsbox kenntlich machen).

Additional solution space (Indicate usage in problem box).
Zusätzlicher Lösungsraum (Bei Benutzung bitte in Lösungsbox kenntlich machen).

Intentionally left blank - Absichtlich freigelassen