

# Higher Mathematics

## Höhere Mathematik

**Exam:** X / Example Exam - Beispielprüfung

**Date:** Sunday 1<sup>st</sup> January, 2023

**Examiner:** Prof. Dr.-Ing. P. Reiss

**Time:** 09:00 – 10:00

<b>Surname / Nachname</b>	
<b>First name / Vorname</b>	
<b>Seat / Sitzplatz</b>	

P 1 P 2 P 3 P 4 P 5 P 6 P 7 P 8 P 9 P 10 P 11 P 12

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

### Working instructions

- Instructions are provided in German and English. You may answer in German or English.  
Angaben sind auf Deutsch und Englisch gegeben. Sie dürfen auf Deutsch oder Englisch antworten.
- This exam consists of 16 pages with a total of **12 problems**.  
Please make sure now that you received a complete copy of the exam.  
Diese Klausur umfasst 16 Seiten mit insgesamt **12 Aufgaben**.  
Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- The total amount of achievable credits in this exam is 60 credits.  
Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 credits.
- Detaching pages from the exam is prohibited.  
Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Allowed resources:  
Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - one **non-programmable pocket calculator**  
ein **nicht-programmierbarer Taschenrechner**
  - one **analog dictionary** English ↔ native language **without annotations**  
ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- **Only those answers are accepted, for which the solution path is recognizable in writing**, unless explicitly stated otherwise.  
Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist, sofern nicht ausdrücklich anders vermerkt.
- Do not write with red or green colors nor use pencils.  
Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Physically turn off all electronic devices, put them into your bag and close the bag.  
Schalten Sie alle elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.
- Additional space for solutions is provided on the last two of the exam.  
Zusätzlicher Platz für Lösungen ist auf den beiden letzten Seite der Klausur gegeben.

Left room from \_\_\_\_\_ to \_\_\_\_\_ / Early submission at \_\_\_\_\_

Intentionally left blank - Absichtlich freigelassen

## Problem 1 Matrix operations - Matrizenoperationen (4 credits)

Form - if possible - with the matrices

Bilden Sie - sofern möglich - mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

and vectors

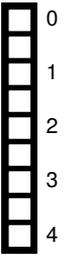
und den Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

the expressions

die Ausdrücke

$$A + C, \quad 2B, \quad A(y + z), \quad C(-4z).$$



## Problem 2 Eigenvalues and eigenvectors - Eigenwerte und Eigenvektoren (3 credits)

0

1

2

3

Determine the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix  
Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix an.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Problem 3 Limits - Grenzwerte (2 credits)

0

1

2

Determine the following limits  
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{4x^2 - x}$

## Problem 4 Dot and cross product - Skalar- und Vektorprodukt (5 credits)

Let  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  be two vectors in  $\mathbb{R}^3$  with

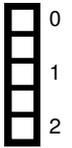
Es seien  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zwei Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{a} = (1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{b} = (0, -1, 1)^T.$$

Determine:

Bestimmen Sie:

- a) the cross product  $\mathbf{c}$  and the dot product  $d$  of the vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ .  
das Vektorprodukt  $\mathbf{c}$  und das Skalarprodukt  $d$  der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .



- b) the cosine of the angle  $\alpha$  between the vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ .  
den Kosinus des Winkel  $\alpha$  zwischen den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .



- c) the area  $A$  of the parallelogram between the two vectors  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ .  
den Flächeninhalt  $A$  des von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

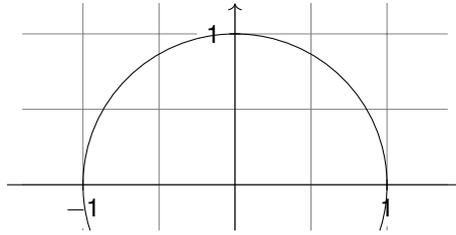


- d) the unit normal vector  $\mathbf{n}$  on  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$ .  
den Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  auf  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .



### Problem 5 Trigonometry - Trigonometrie (3 credits)

- 0   
1
- a) Draw the sine, cosine and tangent of an arbitrary value  $x$  into the diagram below  
Zeichnen Sie Sinus, Kosinus und Tangens eines beliebigen Wertes  $x$  in das Diagramm ein.



- 0   
1   
2
- b) Show that the following equation holds true using the Pythagorean theorem  
Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Pythagoras, dass die folgende Gleichung wahr ist.

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

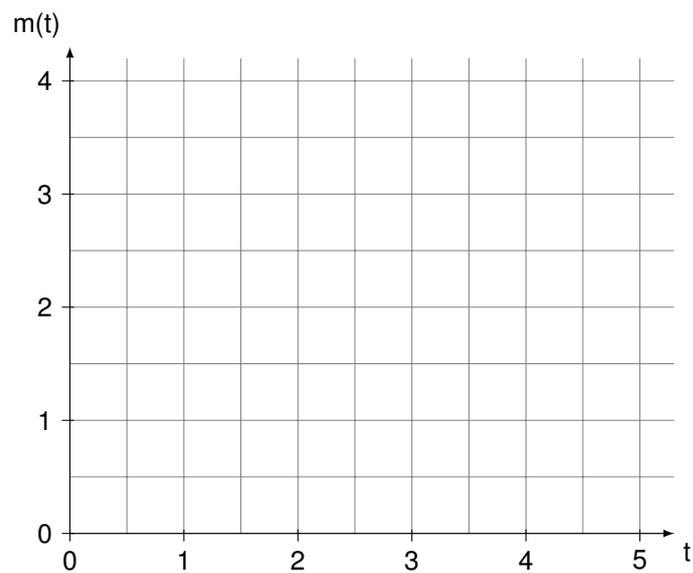
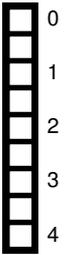
## Problem 6 Linear regression - Lineare Regression (4 credits)

Let  
Es sei

$t_i$	1	2	3	4
$m(t_i)$	3	1	2	1

be a time series of measurements. Determine the linear regression expression  $m(t)$ . Plot the points and the solution of the regression in the provided diagram below.

eine zeitabhängige Messreihe. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade  $m(t)$ . Tragen Sie die Punkte und die Lösung der Regression in das gegebene Diagramm ein.



## Problem 7 Differentiation - Ableitung (8 credits)

0	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>

a) Calculate the first derivative of the following functions  
Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \ln(\sin x) - x \cos(x)$$

$$g(x) = -8 \left( x + \frac{2}{x} \right) + 4 \ln(x + 3)$$

$$h(x) = x^2 \tan(x)$$

0	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>

b) Let  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be given by  
Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

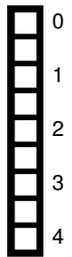
Determine the coordinates of all local extrema of  $f$ .  
Bestimmen Sie die Koordinaten alle lokalen Extrema von  $f$ .

**Problem 8** Integration  
Integration (4 credits)

Calculate the following specific and unspecific integral  
Berechnen Sie das folgende bestimmte und unbestimmte Integral.

(a)  $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

(b)  $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx$



### Problem 9 Newton method - Newtonverfahren (6 credits)

Let  $f : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  be

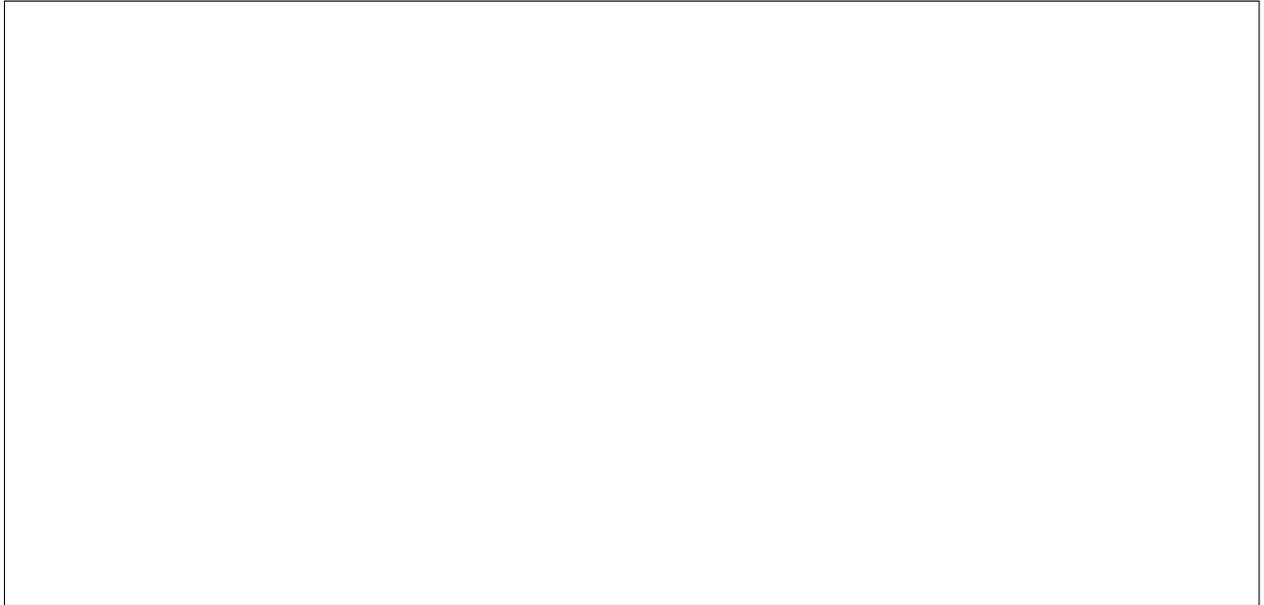
Gegeben sei  $f : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 2$$

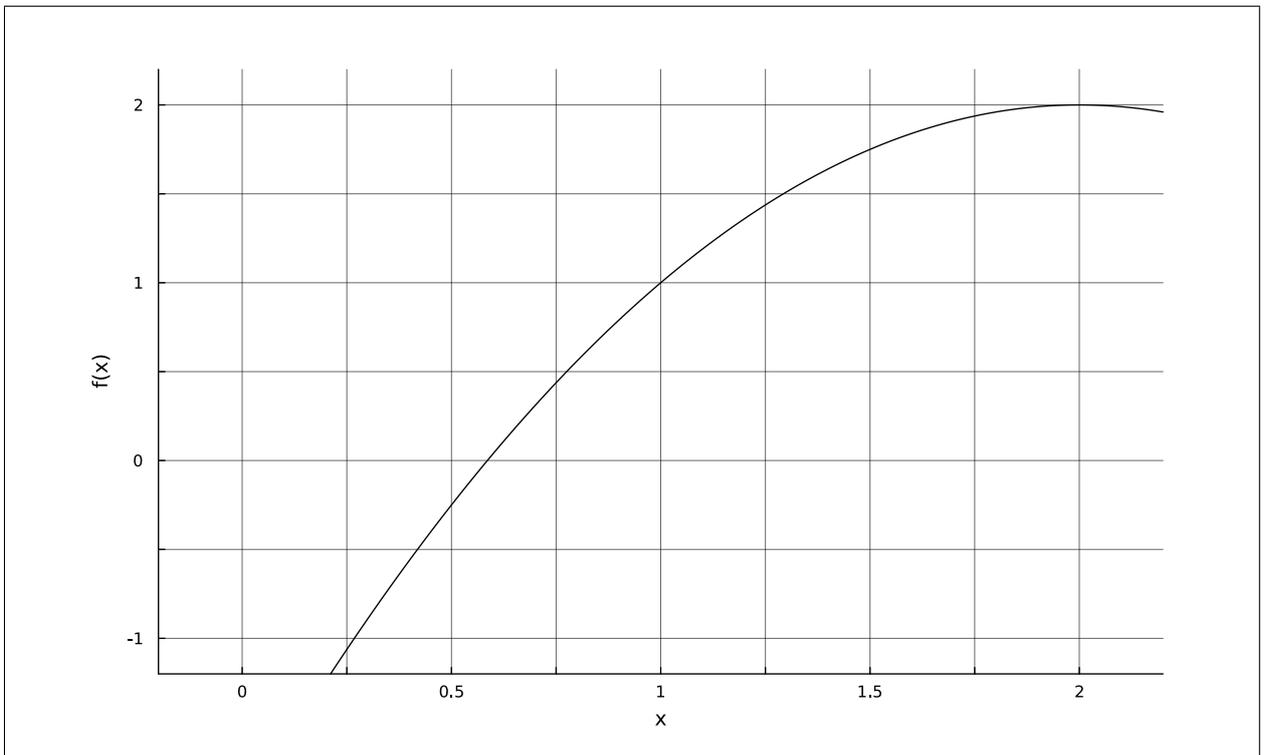
Newton's method shall be used to approximate the root of  $f$  in the given interval. Use  $x_0 = 1.25$  as starting point.

Das Newtonverfahren soll angewendet werden um die Nullstelle von  $f$  im gegebenen Intervall zu berechnen. Nutzen Sie  $x_0 = 1.25$  als Startpunkt.

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4
- a) Perform the first two iterations of Newton's method to obtain  $x_2$  and calculate the error to the true root. Führen Sie die ersten zwei Iterationen des Newtonverfahrens aus um  $x_2$  zu erhalten und berechnen Sie den Fehler zur wahren Nullstelle.



- 0
- 1
- 2
- b) Draw the first two iterations of Newton's method into the diagram below. Zeichnen Sie die ersten beiden Iterationen des Newtonverfahrens in das gegebene Diagramm ein.



## Problem 10 Taylor series - Taylorreihe (4 credits)

Let  
Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

be given by  
gegeben durch

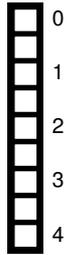
$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 + \sin(x) \cos(y).$$

Determine the second order Taylor polynomial  
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades

$$T_{2,f,a}(x, y)$$

at point  
zum Punkt

$$a = (0, 0)^T$$



## Problem 11 Differential equations - Differentialgleichungen (10 credits)

0	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>

a) Solve the following initial value problem by separation of variables  
Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem durch Separation der Variablen.

$$\dot{x} = e^x \sin(t), \quad x(0) = 0$$

0	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>

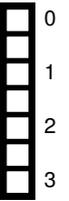
b) Provide a general solution to the following differential equation  
Geben Sie eine allgemeine Lösung für die folgende Differentialgleichung an

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = \sin(t)$$

## Problem 12 Stochastik - Stochastic (7 credits)

a) You manufacture sensors with two different lines and produce 30 pieces of which 10 come from line 1. From this amount, you remove 3 sensors with one grip. What is the probability that at least 2 sensors come from line 2?

Sie stellen Sensoren mit zwei verschiedenen Anlagen her und produzieren 30 Stück von denen 10 aus Anlage 1 stammen. Sie entnehmen aus dieser Menge mit einem Griff 3 Bauteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammen mindestens 2 Sensoren aus Anlage 2?

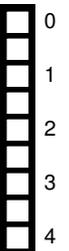


b) Let

Es sei

$$x = [1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5]$$

be a series of measurements. Determine its mean, median, variance, and standard deviation.  
eine Messreihe. Bestimmen Sie deren Median, Mittelwert, Varianz und Standardabweichung.



Additional solution space (Indicate usage in problem box).

Zusätzlicher Lösungsraum (Bei Benutzung bitte in Lösungsbox kenntlich machen).

**Additional solution space (Indicate usage in problem box).**

Zusätzlicher Lösungsraum (Bei Benutzung bitte in Lösungsbox kenntlich machen).

Intentionally left blank - Absichtlich freigelassen